
NYPL RESEARCH LIBRARIES
3 3433 06633396 8







Ric[illegible]
3-VDB

[redacted]

ENCYCLOPÉDIE-RORET.

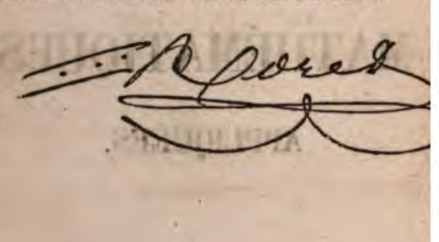
MATHÉMATIQUES

APPLIQUÉES.

AVIS.

Le mérite des ouvrages de l'**Encyclopédie-Roret** le[…] valu les honneurs de la traduction, de l'imitation et d[…] contrefaçon. Pour distinguer ce volume, il porte la signa[…] de l'Editeur, qui se réserve le droit de le faire traduire d[…] toutes les langues, et de poursuivre, en vertu des lois, […]crets et traités internationaux, toutes contrefaçons et tou[…] traductions faites au mépris de ses droits.

Le dépôt légal de ce Manuel a été fait dans le cours […] mois de novembre 1855, et toutes les formalités prescri[…] par les traités ont été remplies dans les divers Etats avec […]quels la France a conclu des conventions littéraires.



ANUELS-RORET.

NOUVEAU MANUEL

DE

ATHÉMATIQUES

APPLIQUÉES

Par Tom RICHARD, INGÉNIEUR.

NOUVELLE ÉDITION,

evue, corrigée, augmentée et ornée de Figures.



PARIS

A LIBRAIRIE ENCYCLOPÉDIQUE DE RORET,
RUE HAUTEFEUILLE, 12.
1856.

OUVRAGES DU MÊME AUTEUR.

Aide-Mémoire général et alphabétique des Ingénieur
3 vol. in-8°, dont un Atlas in-8° de 112 planches in 4
Paris, Dumaine (1848-1854).

Études sur l'Art d'extraire immédiatement le Fer d ses Minerais, sans convertir le métal en fonte, 1 vo in-4° et Atlas in-f°.-plano. Paris, Mathias, 1838.

Sous presse :

Mécanique des Ingénieurs, comprenant :

L'introduction au Calcul des Machines. . . . . . . 1 vo
— le Calcul des Machines et des Mécanismes. 1 vo
— la Stabilité des Constructions. . . . . 1 vo
— la Résistance des Matériaux. . . . . 1 vo

Chaque partie se vendra séparément, chez Mathias, Du maine et Roret.

PRÉFACE

DE LA

TROISIÈME ÉDITION DU MANUEL DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES.

J'avais pour but, lorsque je publiai la *première* édition de ce petit livre, de montrer aux jeunes gens qui ne possèdent encore que des connaissances *élémentaires* en mathématiques, tout le parti qu'ils en pouvaient tirer pour résoudre les problèmes qui se présentent journellement dans les usages ordinaires de la vie. Sans leur faire parcourir la route qui avait pu conduire aux diverses méthodes de calcul, je présentais tout d'abord ces méthodes, et les démonstrations que j'omettais étaient remplacées par des applications numériques qui devaient, croyais-je alors, suffire pour en montrer l'esprit et faire éviter les fausses applications. C'est à l'aide de ce plan que j'étais parvenu à résumer dans un très-petit espace une foule de notions scientifiques et surtout de formules plus ou moins utiles.

Cependant, malgré la bienveillante indulgence avec laquelle ce faible ouvrage de ma jeunesse a été accueillie, et bien que l'écoulement de *six mille* exemplaires eût pu, jusqu'à un certain point, me faire illusion sur la convenance de mon premier plan, je n'ai pas hésité à le modifier profondément, en sacrifiant la *formule* au *raisonnement* qui la découvre, et les *résultats* aux *méthodes* qui y conduisent ; et ne laissant d'*applications numériques* que ce qu'il en faut au lecteur pour s'assurer qu'il a bien compris l'esprit des doctrines.

Quant à l'ensemble des matières que cette *troisième* édition renferme, il est à peu de chose près le même que celui des deux premières. Une table finale et alphabétique y résume comme dans celles-ci les

éléments de mathématiques que le lecteur doit posséder
cédée de notions assez complètes sur le *levé des plans,*
l ement, sur le *partage des terres,* sur le *tracé des cad*
ou la gnomonique *graphique.*

Le *son,* la *lumière* forment l'objet de deux autres cha
aux applications les plus usuelles ; quelques notions
les précèdent ; enfin, et c'est surtout ce qui différentie c
édition, j'y ai fait entrer sous le titre d'*Introduction à l'e*
vement ce que je considère comme les éléments les plus i
de la *mécanique,* étude dont j'ai emprunté le fond au
cul des machines que j'avais ouvert au Conservatoire de
tiers en 1852-53, et dont je prépare la publication complè
où ce Manuel est aujourd'hui parvenu, il peut être cons
une sorte d'introduction à l'*Aide-mémoire général des In*
j'ai publié en 1848-1854, et où le lecteur qui se livre au
trouvera, je l'espère, non pas certes l'*art* et la *science* d
dans leur ensemble et leur détail, mais ce que l'on peut
apprendre dans un livre.

26 octobre 1855. — Rue de Fleurus, 35.

Tom RICHARD, *Ingén*

MANUEL

DE

MATHÉMATIQUES

APPLIQUÉES.

INTRODUCTION A L'ÉTUDE DU MOUVEMENT.

La théorie doit être un instrument
de pratique.

PRONY.

CHAPITRE PREMIER.

1. *Mécanique*. — On définit habituellement la mécanique en disant qu'elle est la science qui traite du *mouvement*, ou bien encore qu'elle est la science des *forces*. Cette double définition serait assez exacte si on la prenait dans son ensemble, mais elle est peut-être un peu vague. L'expérience commune suffit, il est vrai, pour donner une notion claire du mot *mouvement*, mais elle ne paraît pas suffire pour donner une idée aussi nette du sens un peu exclusif que reçoit le mot *force* dans la mécanique appliquée.

2. Tout le monde comprend très-bien, en effet, qu'un *point* est en *mouvement* tant que des instants successifs le trouvent *dans des lieux* différents de l'espace. Mais qu'est-ce qu'une *force*?

Lorsque la Fable nous représente *Atlas* supportant sur ses épaules un monde immobile, *Atlas* exerce-t-il une *force*? Oui, très-exactement, dans le vrai sens du mot. Mais si *Atlas* soulevait sa charge, exercerait-il encore une *force*, un *effort*? Oui, mais il ferait ici *deux* choses à la fois : il exercerait une *force*, un *effort*, et, en même temps, il ferait parcourir un certain *chemin* au point où son effort serait appliqué. Or, dans la mécanique de l'industrie, produire cet effet complexe s'appelle *travailler*, faire un *travail*. La notion *travail* n'est donc pas la notion *force*.

3. *Autre exemple*. — La vapeur qui est retenue dans une chaudière dont elle presse les parois immobiles, exerce-t-elle une *force?* Oui, très-exactement encore et dans le vrai sens du mot.

Et lorsque, le robinet de communication étant ouvert, la vapeur passe de la chaudière dans le cylindre, et y *soulève* le piston de la machine, exerce-t-elle encore une *force*? Nul doute, car elle presse ce piston avec *presque* autant d'énergie que les parois de la chaudière ; mais comme, en outre, elle *déplace* ce piston, comme elle lui fait parcourir un certain *chemin*, comme sa force se meut, se transporte utilement, on dit alors que la vapeur *travaille*, qu'elle fait un *travail*.

4. Il faut donc s'attacher à distinguer, nettement et de bonne heure, la notion simple et la notion complexe que comprennent ces deux expressions : *force* et *travail*. Cela est d'autant plus important, que l'on confond perpétuellement, dans le discours, ces deux expressions pourtant très-distinctes.

5. *Force*. — On voit donc que le mot *force*, dans la langue de la mécanique des arts, correspond exactement au mot *effort* du langage vulgaire, expression qui n'implique ni n'exclut nécessairement l'idée de *mouvement*. Or, comme il n'est pas d'effort, de quelque source qu'il provienne, qui ne puisse être remplacé et mesuré par l'action d'un *poids*, nous définirons la *force*, *un effort dont l'intensité est toujours mesurable par un poids, et exprimable, dès lors, en kilo-*

grammes; et dans le cours de ce petit écrit, le mot *force* aura toujours l'acception que nous venons de lui donner.

Il y a d'ailleurs lieu de distinguer, dans une *force*, en dehors de son *intensité* ou de son *énergie*, savoir : son *point d'application*, sa *direction* et son *sens*.

6. Le *point d'application* d'une force se définit de lui-même; c'est évidemment le point de la résistance sur lequel la force agit.

7. La *direction* d'une force est la droite indéfinie suivant laquelle la force tire ou pousse; et sur cette droite on distingue encore le *sens* de la force. La mécanique s'éloigne donc encore ici du langage vulgaire. Celui-ci dit, par exemple, la direction *nord* et la direction *sud*, tandis que la mécanique ne verrait dans une même méridienne qu'une seule et unique *direction*, dans laquelle elle distinguerait le *sens nord* et le *sens sud*; en sorte que deux forces P Q, qui agissent (fig. 1) dans le sens des flèches de la droite Q P,



ont une seule et même *direction*, mais agissent suivant des *sens* différents et même contraires.

De même, si la main supporte un poids retenu par un simple cordon, le poids et la main exercent des forces ou efforts de même *direction*, mais de *sens* contraires : l'un, le poids, agissant de haut en bas; l'autre, agissant suivant la même droite, mais de bas en haut.

8. *Travail.* — Quant à la notion *travail*, que nous n'avons introduite d'abord que pour qu'on la distinguât mieux de la *force*; nous la compléterons par la définition suivante (*) :

Le travail d'une force est le produit de son intensité exprimée en kilogrammes par le chemin, en mètres, qu'a par-

(*) L'expression *travail*, prise dans le sens que nous indiquons ici, a été introduite par notre illustre maître, M. Poncelet, dès l'année 1825, et universellement adoptée depuis.

couru son point d'application dans la dire
la force.

9. *Kilogrammètre.* — L'unité qui mesure
forces se nomme *kilogrammètre*, d'après M.
est simplement le *travail nécessaire pour s*
mément un kilogramme à un mètre de haut

Ainsi, lorsque, à l'aide d'une poulie fixe e
on a transporté à un grenier élevé de 14 m
blé pesant 100 kilogrammes, on a dépensé u
exprimé par 1400 *kilogrammètres*, quelle qu'
la durée de l'élévation, car la notion du *temp*
n'entre pas nécessairement dans la notion du

On dépenserait encore un travail égal à
mètres en élevant à 7 mètres de hauteur de
pesant chacun 100 kilogrammes; car c'est
chose d'élever un poids de 1 kilogramme à
poids de 2 kilogrammes à 1 mètre, puisqu'i
deux cas élever deux fois 1 kilogramme à 1 r

10. *Galilée*, dès l'année 1592, et plus tard *D*
avaient déjà émis ce principe, qui n'est po
conséquence directe de la définition du *trav*
prime fort inexactement le principe emprunt
à *Galilée*, lorsqu'on répète avec ce grand ho

« Il ne faut ni plus ni moins de force pour
» à une certaine hauteur, qu'il en faudrait
» poids plus pesant à une hauteur d'autant
» poids moindre à une hauteur d'autant plu
et pour être exact, il faut substituer le mot
force dans l'énoncé ci-dessus.

11. *Mesure du travail des forces dans l'in*
vapeur. — Nous avons dit que la notion

(*) Voyez l'article *mécanique* de mon *Aide-mémoire des i*
avoir montré que, vingt siècles avant *Descartes*, *Aristote* avait
analogue, sinon identique, avec celui qu'on attribue à tort au c
çais.

en général indépendante du temps ou de la durée. Mais si, au point de vue purement scientifique, c'est avoir produit un seul et même effet utile que d'avoir élevé un certain poids à une certaine hauteur, soit en un jour, soit en une heure, soit même en une minute, on conçoit que, dans l'industrie, la durée de ce même travail utile ne saurait plus être indifférente et que, au point de vue *économique*, un moteur capable d'élever 100 kilogrammes à 1 mètre de hauteur en *une heure* ne saurait être industriellement confondu avec le moteur qui ferait ce même travail en *une seconde*. Ainsi, la pratique exige une unité de mesure du travail qui implique une durée déterminée, et, à l'exemple de l'Angleterre, la France a adopté le *cheval-vapeur* pour cette unité.

12. *Cheval-vapeur.* — On désigne, en France, sous cette singulière dénomination, le travail capable de vaincre une résistance constante de 75 kilogrammes le long d'un chemin de *un* mètre uniformément parcouru dans la durée d'*une seconde*. Le *cheval-vapeur* anglais, un peu plus élevé que le nôtre, est le travail nécessaire pour élever 33000 livres anglaise, à *un* pied anglais de hauteur en *une minute*; ce qui revient, toutes conversions faites, à dépenser 76 de nos kilogrammètres *en une seconde*.

Origine du cheval-vapeur.—L'origine de cette bizarre unité de travail que nous nommons *cheval-vapeur* doit peut-être être rappelée, ne fût-ce qu'en vue de la rendre excusable.

Ce fut dans la brasserie de *Whitbread*, à Londres, que l'illustre *Watt* fit la première application de sa machine à vapeur. Cette machine devait remplacer un manège destiné à monter de l'eau; et le brasseur, voulant obtenir de la vapeur le même effet utile qu'il obtenait de ses chevaux, proposa à *Watt* de faire *travailler* un cheval pendant une journée de huit heures et de baser le travail du *cheval-vapeur* sur le produit du poids de l'eau qui aurait été élevée à la *fin de la journée*, par la différence des niveaux des réser-

voirs inférieur et supérieur. *Watt* accepta ce marché, et l produit mesuré s'éleva à la fin des huit heures à 212000 de nos kilogrammètres, soit 73.6 kilogrammètres par se conde; un autre essai donna 76 kilogrammètres enviro

Ce travail par seconde se rapproche très-sensiblement celui dit *cheval-vapeur* adopté en France, mais il est beaucoup supérieur à celui que l'on obtiendrait d'une ma nière continue d'un cheval ordinaire. En effet, des expé riences assez authentiques faites aux mines d'Anzin sur l travail de 250 chevaux employés pendant un an à faire mou voir une machine très-simple, n'ont donné, pour l'effet uti d'*un* cheval ordinaire, que huit cent mille kilogrammètr en huit heures, soit 27 à 28 kilogrammètres par seconde.

Ce travail au reste paraît bien faible, et semble indique ou bien que les chevaux d'Anzin étaient peu vigoureux, qu'ils étaient mal nourris, ou bien encore que la machi qu'ils faisaient mouvoir absorbait, en frottements et autr résistances nuisibles, environ le tiers de leur travail ré ainsi que l'indique le tableau suivant qui rappelle le tr vail journalier qu'on peut attendre des divers moteurs an més.

du travail journalier que peuvent fournir les urs animés dans diverses circonstances.

TRAVAIL.	EFFORT MOYEN exercé.	CHEMIN par seconde.	KILOGRAM-MÈTRES par seconde.	DURÉE du travail journalier.	TRAVAIL journalier.
VERTICALE OIDS.					
	kilog.	mètres		heures	km.
montant une ce ou un es- fardeau, son ısistant dans du poids de	65	0.15	9.75	8	280800
re élevant des une corde et :, ce qui l'o- re descendre vide.	18	0.20	3.60	6	77760
re élevant des les soulevant in.	20	0.17	3.40	6	73440
re élevant des :s portant sur u haut d'une ce ou d'un es- venant à vide.	65	0.04	2.60	6	56160
.vre élevant aux avec une ı montant une 1/12 et reve- e.	60	0.02	1.20	10	43200
re élevant des ɔelle à la hau- ıne de 1m.60.	2.7	0.40	1.08	10	38880
.ES MACHINES.					
vre agissant ue à chevilles ɔur · .u de l'axe de	60	0.15	9.00	8	259200
ıas de la roue	12	0.70	8.40	8	241920

NATURE DU TRAVAIL.	EFFORT MOYEN exercé.	CHEMIN par seconde.	KILOGRAMMÈTRES par seconde.	DURÉE du travail journalier.	TRA jou li
	kilog.	mètres		heures	k
Un manœuvre marchant et poussant ou tirant horizontalement.	12	0.60	7.20	8	207
Un manœuvre agissant sur une manivelle.	8	0.75	6.00	8	17
Un cheval attelé à une voiture ordinaire et allant au pas.	70	0.90	63.00	10	216
Un cheval attelé à un manège et allant au pas. .	45	0.90	40.50	8	116
Idem allant au trot. . . .	30	2.00	60.00	4.5	97
Un bœuf attelé à un manège et allant au pas. .	65	0.60	39.00	8	112
Un mulet attelé de même et allant au pas.	30	0.90	27.00	8	777
Un âne attelé de même et allant au pas.	14	0.80	11.20	8	32

Nous reviendrons souvent sur cette quantité nommée
vail qui joue le rôle le plus important dans la méca
appliquée, retournons aux *forces*.

14. *Principe de l'action et de la réaction.* — Une
pourrait-elle s'exercer, si elle ne rencontrait aucune e
de résistance? Il doit paraître évident que cela ne sera
possible, et qu'un point d'application quelconque, pour
voir être soumis à une force déterminée, doit être ca
de résister à l'action de celle-ci avec une énergie au r
égale. Comment concevoir en effet qu'un effort de 100, de
de 300 kilogrammes, par exemple, puisse pousser ou tir
obstacle qui ne résisterait pas du tout, et s'exerçât ainsi c
le néant ou le vide? Comment concevoir même qu'un tel
agisse contre une résistance moindre? l'idée *force* e
effet une idée corrélative, impliquant un antagonisme
cessaire, ou, comme on le dit, une *réaction*, et c'est c
Newton exprimait par cet axiome :

'action est toujours égale à la réaction et de sens con-ire.

l importe d'observer toutefois que, dans les applications, tôt c'est l'énergie de l'*action* qui détermine l'intensité de *·éaction*, et tantôt c'est la puissance de *réaction* qui limite endue de l'*action*. Imaginons, par exemple, un point ab-iment fixe, capable dès lors de résister ou de réagir avec énergie sans limite, suspendons à ce point fixe un poids 100000 kilogrammes, le point fixe réagira évidemment sens contraire de l'*action* du poids avec une énergie me-ée par ce poids lui-même, et c'est ici l'*action* qui déter-era l'intensité de la *réaction*. Mais supposons une lame tique pliée en V, et telle qu'un effort de *dix* kilogram-s suffise pour rapprocher ses deux branches, c'est en vain l'on prétendrait développer contre la force de réaction ce ressort un effort plus grand que son élasticité ne le porte ; c'est donc ici l'énergie déterminée de la force de ction qui limitera l'intensité de l'action possible.

Ainsi, les efforts que l'on peut exercer peuvent être parfois ités par la puissance de réaction des points auxquels on applique ; et avant de supposer, comme on le fait quel-efois, qu'une force déterminée agit sur un point matériel, ut être assuré du moins que ce point d'application est able d'une résistance ou réaction égale et contraire à la ce supposée, sans quoi cette force ne saurait s'exercer avec tensité qu'on lui suppose. En conséquence, nous donne-s au principe de *Newton* la forme suivante qui paraîtra t-être plus explicite, et nous dirons :

Point d'action possible sans une réaction équivalente et sens contraire.

15. *Loi de l'inertie. — Forces d'inertie.* — Mais si aucune ce ou *action* ne peut être exercée qu'à la condition de contrer une résistance ou *réaction* équivalente et de sens traire, comment un corps entièrement libre, et que nous pposerons *d'abord en repos*, peut-il percevoir l'action

d'une force, se laisser animer par elle, lui céde et acquérir enfin du mouvement? Quelle est alo de la réaction qu'il oppose à cette force motrice quelle, en vertu du principe précédent, cette transmettrait pas? *Newton* et la plupart des gé l'ont suivi, adoptant et développant un premie *Keppler*, ont vu dans l'*inertie* de la matière la sou réaction des corps libres.

L'*inertie* serait donc une sorte de passivité d vertu de laquelle ils *résisteraient* à toute mo leur état actuel, soit de repos, soit de mouvemen

« Une force innée dans la matière, disait *Ne*
» pouvoir (*vis insita*) qu'elle a de résister. Les
» cent cette force toutes les fois qu'il s'agit de c
» état actuel..., et on peut alors la considérer s
» pects : ou comme résistante, lorsque le corp
» la force qui tend à le faire changer d'état; ou
» pulsive, lorsque c'est le corps lui-même qui fai
» changer l'état de l'obstacle qui lui résiste. A
» donner à la force qui réside dans les corps l
» expressif de *force d'inertie* (*). »

16. Mais est-ce là un pur concept scientifique o quelque chose de réel que cette *inertie* de la n cette passivité qui devient active, qui réagit, au l'on essaie, soit de tirer un corps du repos, soit la rapidité ou seulement la direction de son mo tuel? L'observation répond à cette question par ples dont il importe peut-être de rappeler quelq

Exemples. — A un vulgaire peson à ressort d suspendez un poids quelconque P, la flexion

(*) *Euler*, dans ses célèbres *Lettres à une princesse d'Allemagne* (l'expression *force d'inertie*. « La qualité par laquelle les corps se con » état étant plutôt, dit-il, l'*opposé d'une force*. » On peut, ce nous s *Euler* que l'*opposé d'une force* ne saurait être rien autre chose qu'un à celle-ci.

nt le repos du système, indiquera simplement ce poids
sayez de changer l'état du système, en le tirant un
rusquement de bas en haut, et le poids résistant à ce
gement d'état pliera davantage le ressort dont le degré
xion devra alors faire équilibre non-seulement au
P, mais encore à la *force d'inertie* de ce même poids;
réaction du corps ou sa *force d'inertie* deviendra ainsi
feste.

e mouvement une fois acquis, on faisait parcourir ver-
ment au système des espaces égaux dans des temps
, quelque petits que fussent ces temps; en d'autres
es, si le mouvement vertical une fois acquis demeurait
itement *uniforme*, le ressort reprendrait et conserverait
gré de flexion qui correspond au seul poids P, la force
rtie de ce poids devenant nulle, puisque l'*état* de ce
ier ne changerait pas.

fin si, le mouvement *uniforme* une fois acquis, on ar-
t brusquement le système, la *force d'inertie* du corps,
ndance à conserver alors ce mouvement acquis agirait
ns inverse de son poids P, et le ressort n'indiquerait
ord que l'excès de ce poids sur cette *force d'inertie*,
revenir ensuite au degré de flexion correspondant en-
au seul poids P, après quelques oscillations.

ous apprendrons tout-à-l'heure à évaluer l'*intensité* des
s d'inertie, intensité qui, comme celle de toutes les au-
forces, s'exprime d'ailleurs en kilogrammes (5). Qu'il
suffise d'indiquer pour le moment que, soit qu'il s'agisse
primer du mouvement à un corps en repos, ou de mo-
r son mouvement, la *force* qu'il oppose à ce changement
t sera *proportionnelle* à son poids ainsi qu'à l'*accéléra-*
qu'il a dû acquérir ou perdre dans la direction de la force
ificatrice.

. *Permanence du mouvement et du repos.* — Puisque
loi d'une force est absolument nécessaire pour modifier
, *soit de repos*, *soit* de mouvement d'un corps, il en ré-

sulte qu'un mouvement, une fois acquis, devra persist modification aucune, aussi longtemps que le corps qui doué ne sera soumis à aucune nouvelle force; ce n ment serait donc *éternel*, si le corps ne rencontrait aucun obstacle. Cependant l'esprit, qui admet facil l'éternelle *conservation du repos*, éprouve une sorte pugnance à admettre l'*éternelle conservation d'un* *ment acquis*. Cela est dû à ce qu'au milieu des obsta forces qui agissent à la surface de la terre sur les co mouvement, ils parviennent toujours au repos à la l mais pour les uns, c'est l'effet unique de la *résistance d* pour les autres, le *frottement* que quelques points de surfaces exercent, pour d'autres encore, c'est qu'une invisible, mais éternellement agissante, leur *poids*, l viant de leur trajectoire primitive, les ramène à la du sol où tant d'obstacles éteignent leur vitesse. P en effet, une observation attentive montre à côté de dification de l'état d'un corps, la force qui a produit modification; elle montre même que, lorsqu'aucune n'intervient, le corps conserve et conserve *éternellen* mouvement qu'il a une fois acquis. Quelques exemple ront.

Exemples. — Tout le monde sait qu'au moment quitte un véhicule en marche, on en conserve le mouv jusqu'à ce que les efforts musculaires des jambes, ai frottement que les pieds exercent sur le sol, soient pa à l'éteindre.

Si la vitesse du véhicule est très-grande, la réaction culaire peut être insuffisante, et la partie supérieure du conservant alors la plus grande partie de sa vitesse ho tale, tourne autour de sa base et couche le voyageur tournée dans le sens du mouvement qu'il avait préc ment acquis.

La conservation du mouvement est encore plus c ment évidente lors de la rencontre de deux convois

hemin de fer; et les voyageurs, non prévenus à temps de imminence du danger, et qui n'ont pu s'accrocher à quelue lien plus ou moins résistant de l'intérieur du wagon, ont lancés pêle-mêle contre la paroi antérieure de celui-ci, vec la vitesse qu'ils avaient avant le choc.

Lorsqu'un vaisseau qui se meut d'un mouvement rapide ient à donner sur un roc, tout ce qui est à bord, hommes, anons, meubles, se trouve lancé en avant, et la poupe, en ertu de l'inertie, continue elle-même à se mouvoir dans le nême sens, pressant ainsi contre l'obstacle la proue qu'elle crase à la fin.

L'écolier a le sentiment de l'*inertie* lorsque, pour sauter in fossé, il commence par s'en éloigner pour revenir en ourant jusqu'au bord (ce qu'il appelle *prendre son élan*); t l'expérience lui a enseigné qu'il conservait alors la vitesse horizontale qu'il avait acquise et qui suffit pour le porter l'autre bord.

Une balle bien polie qu'on fait rouler sur l'herbe s'arrête bientôt. — La durée de son mouvement sur une planche unie et recouverte de drap serait plus longue; — plus longue encore sur la planche seule, parce que le *frottement* y serait moindre. — Sur la glace, où le frottement est presque nul, elle parcourrait une distance très-considérable si l'air se mouvait dans le même sens et avec la même vitesse que la balle.

Une grosse toupie terminée par une pointe *mousse* et mise en mouvement dans le *vide* sur une surface dure et polie, persiste dans son mouvement de rotation pendant un temps considérable; et les *Transactions philosophiques* rapportent une ancienne expérience de ce genre faite à l'aide de la machine pneumatique, où le mouvement de la toupie a persisté pendant deux heures et seize minutes (*).

(*) Le lecteur trouvera une foule de faits intéressants, à l'appui de la conservation du mouvement, dans la traduction, que je publiai il y a vingt-cinq ans, de la *mécanique de Neil Arnott*, ouvrage estimable, mais spécialement destiné par son savant auteur aux *gens du monde*, aux *hommes de lettres*, aux *physiciens*, aux médecins, en un mot aux *personnes les moins versées* dans l'étude des mathématiques.

Mais si ces faits, et tant d'autres que l'on pourrait citer, rendent *probable* la conservation indéfinie du mouvement acquis, il faut bien convenir cependant qu'ils ne la démontrent pas encore. Prenons donc un exemple de mouvement qui ne se soit jamais éteint, car il en existe; et sans monter jusques aux corps célestes, laissant même de côté le mouvement de *translation* de la terre dans son orbite, qui est convaincant toutefois, mais qui est peut-être trop compliqué, eu égard à nos connaissances actuelles, citons le mouvement de *rotation* de ce globe sur son axe, mouvement *éternel*, rigoureusement *uniforme*, et que la majestueuse expérience du pendule de M. *Foucault*, rend évident, en vertu d'un autre exemple d'inertie qui mérite que nous nous y arrêtions un moment. Voici à peu près la théorie que nous avons donnée de cet ingénieux appareil à l'article *pendule*, de notre *Aide-mémoire des ingénieurs* (*) (page 1261), et dans nos leçons au Conservatoire des arts et métiers, en 1852-53.

18. *Pendule de Foucault* (fig. 2 et 3). On appelle ainsi un pendule d'une grande longueur à l'aide duquel M. *Foucault* a, le premier, rendu très-apparent le mouvement de rotation de la terre sur son axe. Il est formé d'une sphère assez lourde suspendue à un fil d'acier très-délié attaché à un seul point fixe A. La sphère porte à son pôle inférieur un style exactement placé dans le prolongement du fil de suspension. On éloigne le pendule de la verticale, on l'abandonne à lui-même, il oscille alors dans un plan vertical dont l'*orientation* primitive doit rester éternellement la même, si l'inertie est une des lois de la nature.

Soit donc A le point de suspension; pendant toute la durée des oscillations du pendule, ce point A est emporté autour de l'axe terrestre PP′ d'un mouvement rigoureusement uniforme, et, vu la petitesse du pendule par rapport

(*) *Trois vol. in-8°, dont un atlas in-8° de 112 planches in-4°, Paris, Dumaine, éditeur, rue Dauphine (1848-1854).*

aux dimensions de la terre, le point A peut être considéré comme confondu avec B, et décrivant dès lors uniformément un cercle de rayon DB dont le plan est parallèle à l'équateur ECQ.

Admettons, pour plus de simplicité, que le plan primitif d'oscillation A*sn* se confonde avec celui ECP du méridien du lieu B d'observation. Etablissons en B un plan horizontal en sable sur lequel le style du pendule pourra marquer la trace de son passage, et prolongeons par la pensée la méridienne horizontale BM du point B jusqu'à sa rencontre avec l'axe terrestre en M. Le point B, mobile autour de D et de M à la fois, appartient donc toujours à la circonférence décrite du rayon BD et au cône dont DM est l'axe, BM l'une des génératrices et le demi-angle au sommet = BMD = λ = latitude du pendule : donc aussi, pour un angle quelconque *d* décrit par B autour de D, il y aura toujours un angle *m* décrit par B autour de M, et tel que l'on a entre ces angles la relation :

$$\frac{m}{d} = \frac{DB}{MB} = \sin.\ \lambda, \text{ ou } m = d \times \sin.\ \text{latitude}.$$

Ainsi B, décrivant autour de D quinze degrés par heure sidérale, ce point ne décrirait autour de M que 11° 18′ environ dans le même temps, si le pendule oscillait à la latitude de 48° 52′, qui est à peu près celle du *Conservatoire* à Paris.

Cela posé, admettons que le pendule commence ses oscillations à 0 heure suivant le plan du méridien MB ou ME_0 ; sa première oscillation tracera sur le sable la méridienne *sn*. Après une heure sidérale, cette trace *sn*, le méridien ME_0 et le point de suspension A du pendule se trouveront tous transportés vers l'orient dans le plan ME_1 à 11° 18′ de ME_0 pour la latitude indiquée, et si le pendule oscille encore, il tracera sur le sable la droite s_1n_1. En vertu de l'inertie qui conserve au plan des oscillations sa première orientation cette trace, dont la projection est s_1n_1 parallèle dès lors

$M E_0$, coupera la première trace sn sous un angle $s_1B_1E_1$; et pour l'observateur qui, placé sur le méridien la face tournée vers le sud, a été emporté avec tout le système, le pendule *semblera* avoir dévié à droite de l'angle $s_1B_1E_1 = E_0 M E_1$. Si le pendule oscille encore une heure plus tard, la déviation $S_2B_2E_2$ sera double; enfin, elle aura triplé après trois heures, et la trace s_3n_3 couperait alors la première trace sn sous un angle $s_3B_3E_3$ de près de 34 degrés. Il est facile de voir maintenant que la déviation *apparente* du pendule de l'orient vers l'occident est l'effet du mouvement de rotation *réel* de la terre en sens inverse (*).

Ainsi, cette belle expérience montre à la fois la conservation du mouvement de rotation de la terre autour de son axe, et la conservation de la *direction* ou de l'*orientation* du mouvement du pendule.

19. *Conclusion.* — Concluons donc de l'ensemble de ce paragraphe que les corps, libres ou non, réagissent contre les forces extérieures qui tendent à modifier leur état, soit de mouvement, soit de repos; que, en l'absence de ces forces extérieures, ils persistent éternellement dans cet état en vertu de leur *inertie*; et puisque nulle action n'est possible sans une réaction équivalente et de sens contraire (14), la *force d'inertie* de chacun des points matériels d'un système sera à chaque instant égale et de sens contraire à la force

(*) Quelques esprits chagrins ont contesté à M. Foucault la priorité de cette grand et belle expérience, se fondant sans justice sur l'extrait suivant d'une note de *Vi-viani* adressée à l'Académie des sciences de Paris (*Comptes-rendus*, tome XXXII, pag 635), et tiré d'anciennes observations faites par les membres de l'Académie *del ci-mento*.

« Osservammo che tutti i penduli da un sol filo deviano dal primo verticale e sem- » prè per il medesimo verso, cive (fig. 4) secondo le linee AB, CD, EF, etc., d » dextra verso sinistra delle parte anteriori.... »

Il ne faut pourtant pas oublier que cette note est restée complètement *inédite jus-qu'après l'époque où M. Foucault* fut mis à même de réaliser sous la coupole du Panthéon, *ses majestueuses* expériences pendulaires. M. Foucault y a ajouté depuis un *série très-importante d'autres* expériences *gyroscopiques*, qui ont ouvert aux théo*ciens un vaste* champ d'études qu'ils n'ont point encore suffisamment exploré.

qui tend à modifier l'état de ce point, et sera dès lors mesurée par le même nombre de kilogrammes que cette même force modificatrice.

CHAPITRE II.

Du Mouvement, de la Vitesse et de l'Accélération.

20. *Mouvement.* — Considérons maintenant le *mouvement* au point vue purement géométrique, en faisant d'abord abstraction des causes mécaniques qui le produisent

Nous avons déjà vu (2) *qu'un point était en mouvement tant que les instants continus et successifs de la durée trouvaient ce point dans des lieux différents de l'espace.*

21. *Mouvement rectiligne.* — Admettons d'abord que ce point se meuve en ligne droite et imaginons que le nombre t de secondes, qui exprime la durée de son mouvement, a été partagé en un nombre *infini* d'instants, tous égaux entre eux et nécessairement *infiniment* courts. Enfin, représentons par dt chacun de ces éléments égaux du temps t, la lettre d étant une simple *caractéristique* ou un *signe* destiné à rappeler que chacun de ces éléments dt a une durée qui n'est comparable qu'à celle de l'*instant* qui sépare le passé de l'avenir, et qui n'est pas dès lors assignable en nombres.

Représentons par e l'espace total en mètres parcouru par le point mobile pendant la durée t de son mouvement, durée toujours exprimée en secondes; et, en vue de fixer plus nettement les idées, traçons, à partir d'un même point o (fig. 5), deux droites perpendiculaires entre elles : l'une horizontale oT, proportionnelle au nombre t de secondes; l'autre oE, verticale, qui soit la droite e décrite elle-même par le point mobile. Ces droites, par leur absolue continuité, seront *très-propres à* représenter : l'une, la continuité du *temps; l'autre,* celle de la trajectoire du mobile.

Cela posé, partageons par la pensée la droite oT, ou l'*a*
des temps, en éléments successifs dt_1, dt_2, dt_3, dt_4, trè
petits et tous égaux entre eux et à dt, et, la loi du mouv
ment du mobile sur sa trajectoire oE, étant supposée connu
portons sur cette droite successivement à partir de son or
gine o, les petits chemins de_1 de_2 de_3 de_4, etc., respect
vement parcourus pendant les dt qui portent les mêmes i
dices inférieurs.

Par chacun des points de division, tant de l'axe oT d
temps que de l'axe oE des chemins ou espaces, élevez alo
des perpendiculaires; ces perpendicaires se rencontrero
en 1, 2, 3, 4 (fig. 6 et 7), et si l'on fait passer une ligne co
tinue par ces points d'intersection, la forme de cette lig
0, 1, 2, 3, 4 (qu'il faut bien se garder de confondre avec
trajectoire oE du point mobile), peindra aux yeux l'ensen
ble des rapports entre les chemins parcourus et les tem
écoulés.

22. *Mouvement uniforme.* — Ainsi (fig. 5), lorsque, a
éléments dt du temps, tous égaux entre eux, corresponde
des éléments de de la trajectoire qui soient aussi égaux en
eux, la ligne 0, 1, 2, 3, 4, 5, est une droite; on dit alors q
le mouvement est *uniforme*; et on voit avec évidence que
mouvement *uniforme* sera d'autant plus rapide que l'an
EoS sera moins ouvert, ou que l'angle ToS le sera d
vantage.

23. *Mouvement varié.* — Que, si aux éléments dt
temps, toujours supposés *égaux* entre eux, correspondent d
éléments de de la trajectoire, tous *inégaux* entre eux,
ligne 0, 1, 2, 3... S (fig. 6 et 7), est nécessairement *cour*
et le mouvement est dit *varié*.

24. *Mouvement accéléré.* — Il est évidemment *accél*
(fig. 6), si aux éléments égaux et successifs dt du temps c
respondent des éléments *croissants* de la trajectoire oE;
la courbe 0, 1, 2, 3... S, toujours *convexe* alors vers l'axe d
des temps, a ses éléments propres (0 1) (1 2) (d s) (3 4) d

tant plus inclinés par rapport à cet axe que le mouvement est plus rapide.

25. *Mouvement retardé.* — Enfin le mouvement est évidemment *retardé*, lorsqu'aux éléments égaux, continus et successifs *dt* de la durée du mouvement, correspondent (fig. 7) des éléments *de* de la trajectoire qui *décroissent* sans cesse; et la courbe 0, 1, 2... S, alors toujours *concave* vers l'axe oT des temps, a ses éléments propres d'autant moins inclinés sur cet axe que le mouvement est moins rapide; de sorte que si l'un de ses éléments devenait parallèle à l'axe oT, la rapidité du mouvement ou la *vitesse* du point mobile serait nulle pour l'instant *dt* correspondant.

26. *Vitesse.* — Nous appelons proprement *vitesse* d'un point à un instant déterminé *dt* le nombre v de mètres qu'il parcourrait en une seconde, si, à cet instant même il était subitement abandonné à sa seule *inertie* (§ 17).

Il résulte de cette définition elle-même, que l'état du point matériel devant rester éternellement le même qu'à l'instant considéré, si *de* représente en général le chemin infiniment petit décrit pendant cet instant *dt*, le point décrira encore, dans un second instant *dt*, un autre chemin *de* absolument égal au premier *de*; qu'il en sera de même pour tous les instants suivants, et que dès lors le chemin v que le point aurait parcouru au bout de 1 seconde serait le 4e terme de la proportion :

$$dt : de :: 1^s : v$$

d'où $$v = \frac{de}{dt}; \quad de = v\,dt; \quad dt = \frac{de}{v} \qquad (1)$$

relations dont nous verrons l'emploi par la suite.

27. *Figuré de la vitesse.* — Il résulte encore de la proportion ci-dessus que, pour tracer la vitesse à un instant *donné sur la ligne représentative du mouvement du point (fig. 7), il suffira de mener*, par l'extrémité de l'ordonnée qui *correspond à l'instant donné* (par 3 par exemple), savoir

1° une parallèle $3n$ à l'axe des temps ayant, à l'échelle de la figure, la longueur qui correspond à *une* seconde; 2° une perpendiculaire indéfinie nm, passant par l'extrémité n de cette parallèle; 3° une tangente au point 3 de la courbe, dont l'ordonnée $t3$ correspond au temps écoulé ot, compté depuis l'origine du mouvement. Cette tangente $3m$ limitera la longueur nm de la perpendiculaire, laquelle représente la vitesse v_3, dont le point est animé au point c de sa trajectoire. En effet, les triangles semblables $mn3$ et $3q2$ donnent la relation :

$$(q3) : (q2) :: (mn) : (n3), \text{ soit } de_3 : dt :: v_3 : 1^s,$$

$$\text{ou } v_3 = \frac{de_3}{dt}$$

On obtiendrait, par le même procédé, la grandeur (et non la direction) des vitesses v_0, v_1, v_2, etc., à une époque quelconque du mouvement.

La ligne représentative du mouvement étant une *droite* (fig. 5), lorsque ce mouvement est uniforme, toutes les *tangentes* à cette droite se confondraient avec cette droite ellemême, et l'on aurait toujours :

$$\frac{de_1}{dt_1} = \frac{de_2}{dt_2} = \frac{de_3}{dt_3} \ldots = \frac{E}{T} = v = \frac{de}{dt}$$

Ainsi, *lorsque le mouvement est uniforme, la vitesse* v *est le quotient constant d'un chemin quelconque* E, *exprimé en mètres, divisé par le nombre de secondes* T *qui a été employé pour décrire ce chemin.*

28. *Accélération.* — Quel que soit le mouvement rectiligne du point matériel, ou quelle que soit la *forme* de la ligne oS qui représente la loi de ce mouvement (fig. 8), on pourra toujours, par le procédé précédent, figurer la grandeur des *vitesses* v_1, v_2, v_3, qui correspondent à des temps écoulés quelconques t_1, t_2, t_3... depuis l'origine du mouvement. Tracez alors (fig. 9) un axe des temps ot_5 pa-

égal au premier et divisé de la même manière. Par
e ces points de division, élevez des perpendiculaires
v_1... v, égales aux vitesses de la figure 8. Par les
s de ces perpendiculaires, faites passer une courbe
ela fait, et pour avoir une *image* de la quantité
accélération à une époque quelconque t_1 du mouve-
rrespondante au point e_1 de la trajectoire, menez,
émité Z de v, une parallèle indéfinie ZQ à l'axe des
uis, par Z, une tangente ZR à la courbe MZN.
ur la parallèle à l'axe des temps, une longueur ZQ
ésente *une seconde* à l'échelle de la figure; par
té Q de cette longueur, élevez la perpendiculaire
'à sa rencontre avec la tangente. Appelant φ_1 cette
QR, et remarquant que dv_1 est la petite variation
a la vitesse v_1, dans l'élément du temps dt, on a,
le la similitude des triangles :

$$: dv_1 :: ZQ : QR :: 1^s : \varphi_1 = \frac{dv_1}{dt}.$$

endrait de même la grandeur des accélérations φ_2,
orrespondantes aux durées t_2, t_3,.. t, écoulées de
gine du mouvement; de sorte que, représentant en
ar φ la quantité *accélération* à l'époque du mou-
ù la variation instantanée de la vitesse est dv, on
es trois quantités les relations générales :

$$= \frac{dv}{dt}, \text{ d'où } dv = \varphi dt, \text{ et } dt = \frac{dv}{\varphi} \qquad (2)$$

mme nous avons trouvé plus haut (1) que l'on avait,
al, $dt = \frac{de}{v}$, on obtient, en égalant entre elles
valeurs de dt, cette autre relation générale qui
ira par la suite :

$$\varphi de = vdv \qquad (3)$$

de la forme générale $a x^n d x$ (ce qu'on exprime en fais[...] précéder l'expression du signe $\int$, on devra : 1° augment[...] d'une unité l'exposant constant n de la quantité variable[...] 2° diviser l'expression par cet exposant ainsi augmenté [...] par $d x$. Ainsi :

$$\int a x^n d x = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$$

On trouverait donc :

$$\int x d x = \frac{x^2}{2}; \int 2 x d x = x^2$$

$$\int \frac{1}{2} x^2 d x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{1}{6} x^3$$

Il y a, toutefois, une exception à cette dernière règle qu[i] est relative au cas unique où l'on aurait $n = (-1)$; en ap[-]pliquant, en effet, la règle générale, on obtiendrait :

$$\int a \frac{d x}{x} = \int a x^{-1} d x = \frac{a x^0}{o} = \frac{a \times 1}{o} = \infty$$

Or, il n'est pas de mon objet d'expliquer ici ce résultat [...] je dois me contenter de renvoyer aux traités spéciaux où l'o[n] démontre que l'on a en général :

$$\int \frac{d x}{x} = \text{log. hyp. } x = 2.3026 \text{ log. } x$$

C'est-à-dire que l'*intégrale de l'expression* $\frac{dx}{x}$ *est égal[e] au logarithme hyperbolique de* x, *ou encore au logarithm[e] vulgaire de* x *multiplié par le nombre constant* 2.3026.

Si l'on doit intégrer l'une quelconque des expressions ci[-] *dessus, entre* deux instants où la variable x prendrait [...]

valeurs déterminées, x' et x_0 par exemple ; x' étant la plus grande de ces deux valeurs, on indique cette opération par la notation :



$$\int_{x_0}^{x'}$$

et on l'effectue en faisant successivement $x = x'$, puis $x = x_0$ dans les expressions précédentes ; on intègre alors chacune d'elles par la règle qui lui convient, et l'on retranche ensuite le dernier résultat du premier. Ainsi :

$$\int_{x_0}^{x'} a\,x^n\,dx = \frac{a\,x'^{n+1}}{n+1} - \frac{a\,x_0^{\,n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{a}{n+1}\left(x'^{\,n+1} - x_0^{\,n+1}\right).$$

$$\int_{x_0}^{x'} \frac{dx}{x} = \log.\ \text{hyp.}\ x' - \log.\ \text{hyp.}\ x_0 = \log.\ \text{hyp.}\ \frac{x'}{x_0}$$
$$= 2{,}3026 \log.\ \frac{x'}{x_0}$$

L'application de ces règles est donc très-simple. On va voir combien elles sont fécondes et avec quelle facilité, à l'aide de leur emploi, on déduit d'une seule loi de mouvement, donnée par l'expérience ou par l'observation, toutes les circonstances particulières qui caractérisent ce même mouvement à un instant quelconque de sa durée.

34. *Problème de mouvement rectiligne.* — *Supposons que le mouvement rectiligne d'un point matériel soit tel que, partant du repos, ce point parcourre* k *mètres pendant la durée de la première seconde, et que, pendant la durée totale de son mouvement, les espaces* e, *qu'il a parcourus, croissent comme les cubes des nombres* t *de secondes écoulées depuis*

de la forme générale $a x^n d x$ (ce qu'on exprime en fai[...]
précéder l'expression du signe $\int$, on devra : 1° augmen[...]
d'une unité l'exposant constant n de la quantité variable[...]
2° diviser l'expression par cet exposant ainsi augmenté[...]
par $d x$. Ainsi :

$$\int a x^n d x = \frac{a x^{n+1}}{n+1}$$

On trouverait donc :

$$\int x d x = \frac{x^2}{2}; \int 2 x d x = x^2$$

$$\int \frac{1}{2} x^2 d x = \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} = \frac{1}{6} x^3$$

Il y a, toutefois, une exception à cette dernière règle q[...]
est relative au cas unique où l'on aurait $n = (-1)$; en ap[...]
pliquant, en effet, la règle générale, on obtiendrait :

$$\int a \frac{d x}{x} = \int a x^{-1} d x = \frac{a x^0}{o} = \frac{a \times 1}{o} = \infty$$

Or, il n'est pas de mon objet d'expliquer ici ce résultat [...]
je dois me contenter de renvoyer aux traités spéciaux où l'o[...]
démontre que l'on a en général :

$$\int \frac{d x}{x} = \text{log. hyp. } x = 2.3026 \text{ log. } x$$

C'est-à-dire que *l'intégrale de l'expression* $\frac{dx}{x}$ *est égal[...]*
au logarithme hyperbolique de x, *ou encore au logarithm[...]*
vulgaire de x *multiplié par le nombre constant* 2.3026.

Si l'on doit intégrer l'une quelconque des expressions ci[...]
dessus, entre deux instants où la variable x prendrait de[...]

valeurs déterminées, x' et x_0 par exemple ; x' étant la plus grande de ces deux valeurs, on indique cette opération par la notation :

$$\int_{x_0}^{x'}$$

et on l'effectue en faisant successivement $x = x'$, puis $x = x_0$ dans les expressions précédentes ; on intègre alors chacune d'elles par la règle qui lui convient, et l'on retranche ensuite le dernier résultat du premier. Ainsi :

$$\int_{x_0}^{x'} a\, x^n\, dx = \frac{a x'^{n+1}}{n+1} - \frac{a x_0^{n+1}}{n+1}$$
$$= \frac{a}{n+1}\left(x'^{n+1} - x_0^{n+1}\right).$$

$$\int_{x_0}^{x'} \frac{dx}{x} = \text{log. hyp. } x' - \text{log. hyp. } x_0 = \text{log. hyp. } \frac{x'}{x_0}$$
$$= 2.3026 \text{ log. } \frac{x'}{x_0}$$

L'application de ces règles est donc très-simple. On va voir combien elles sont fécondes et avec quelle facilité, à l'aide de leur emploi, on déduit d'une seule loi de mouvement, donnée par l'expérience ou par l'observation, toutes les circonstances particulières qui caractérisent ce même mouvement à un instant quelconque de sa durée.

31. *Problème de mouvement rectiligne. — Supposons que le mouvement rectiligne d'un point matériel soit tel que, partant du repos, ce point parcourre* k *mètres pendant la durée de la première seconde, et que, pendant la durée totale de son mouvement, les espaces* e, *qu'il a parcourus, croissent comme les cubes des nombres* t *de secondes écoulées depuis*

l'origine du mouvement. On demande sa vitesse v *à chaque instant et l'accélération* φ?

$$e = kt^3$$

est, d'après l'énoncé même, la loi qui lie les espaces et les temps. De cette relation fondamentale, et à l'aide de la règle (32) on déduit :

$$de = 3\ kt^2 dt.$$

Les petits chemins de, parcourus successivement pendant chacun des instants égaux dt du mouvement, croissent donc, comme les carrés t^2, du nombre de secondes écoulées depuis l'origine ; donc, les vitesses (1)

$$\frac{de}{dt} = v = 3\ kt^2$$

croissent aussi comme les carrés de ces temps.

Différentiant les deux membres de la dernière équation par rapport aux quantités variables v et t, il vient en se conformant à la règle (32).

$$dv = 6\ kt\,dt.$$

Ainsi, les accroissements successifs dv de la vitesse v grandissent proportionnellement à la durée t écoulée depuis l'origine, et l'accélération

$$\frac{dv}{dt} = \varphi = 6\ kt$$

varie elle-même proportionnellement à la même durée t, toujours exprimée en secondes. Cette accélération n'est donc pas constante, elle augmenterait avec le temps.

35. *Problème. Chute des graves.* — La nature ni l'art, peut-être, ne nous offrent aucun exemple de mouvement précédent; mais si nous supposons que les espaces parcourus, au lieu de croître comme les *cubes*, croissent seulement comme les *carrés* des nombres de secondes écoulées depuis l'ori-

ı mouvement, nous tombons sur la loi même qui ré-
hute des corps graves à la surface de la terre, loi dé-
c expérimentalement par *Galilée*, vers 1638, et sur
; nous essaierons, tout à l'heure, de fonder toute la
que du mouvement.

;nons toujours par k le nombre de mètres que le point
.vement parcourt dans la première seconde;

$$e = kt^2 \qquad (4)$$

:tte fois, l'expression fondamentale qui lie les espaces
emps, et la règle (32) nous donnera, pour chacune des
égales et infiniment petites dt, des espaces infiniment

$$de = 2ktdt \qquad (5)$$

égaux entre eux, puisqu'ils grandissent à mesure que
:e t écoulée depuis l'origine du mouvement augmente.
sse

$$\frac{de}{dt} = v = 2kt \qquad (6)$$

ıte donc proportionnellement à la même durée t. Mais
la relation fondamentale (4) donne

$$t = \sqrt{\frac{e}{k}} \qquad (7)$$

ı, en substituant cette valeur générale de t dans l'é-
ı ci-dessous, cette autre expression :

$$v = \sqrt{4ke}, \text{ ou } v^2 = 4ke \qquad (8)$$

ıntre que, dans ce genre de mouvement, *les carrés
:sses acquises croissent comme les espaces parcourus
rtir du point de départ.*

rentiant, par la règle (32), l'expression (6) par rapport
riables v et t, on obtient pour les accroissements suc-
dv de la vitesse

$$dv = 2kdt \qquad (9)$$

et comme les instants dt sont toujours supposés égaux entre eux, $2k$ étant lui-même un facteur constant, on voit que tous les accroissements dv de la vitesse sont ici égaux entre eux à toute époque du mouvement ; ce qui caractérise le mouvement *uniformément* accéléré. L'*accélération* φ devient ainsi :

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = 2k, \text{ ou } \frac{\varphi}{2} = k \tag{10}$$

elle est donc, elle-même, constante à toute époque *et égale au double de l'espace* k *que le point matériel a parcouru à la fin de la première seconde.*

En éliminant successivement entre ces équations les quantités e, t, v, φ, k, les jeunes élèves pourront former ici un tableau général de toutes les formules du mouvement uniformément accéléré, dont ils pourront ensuite vérifier l'exactitude en le comparant au tableau de la page 47.

Dans le cas de la chute des graves, on désigne habituellement l'accélération φ par la lettre g, et la valeur numérique de g, déterminée par l'observation, est à Paris :

$$g = 9^{m}.80896.$$

36. *Problème.* — Enfin, si l'on donnait un mouvement exprimé par la relation

$$e = kt$$

il doit paraître évident que ce mouvement serait *uniforme*, puisque les espaces parcourus e sont ici proportionnels aux durées t écoulées, où les accroissements de de ces espaces correspondant à des instants égaux dt étant, à toute époque du mouvement, égaux entre eux, ou enfin la vitesse

$$\frac{de}{dt} = v = k$$

étant constante et toujours égale à k, *soit égale au chemin décrit dans la première seconde*. Cette quantité k, étant elle

même un nombre constant, n'a point de différentielle ou, mieux, son accroissement est zéro ; l'accroissement dv de la vitesse est donc nul dans le cas du mouvement uniforme, et il en est de même de l'accélération φ.

CHAPITRE III.

De la communication du Mouvement par les forces.

37. L'étude de la notion des *forces* et du *travail* a été l'objet de notre premier chapitre. Nous avons, dans le second, considéré les mouvements en eux-mêmes, en faisant abstraction complète des causes qui les produisent. Nous allons essayer, dans ce troisième chapitre, de lier entre eux ces mouvements et ces forces, d'étudier leur dépendance mutuelle et de découvrir enfin les lois qui régissent la communication du mouvement. Or, ces lois étant purement *physiques*, c'est évidemment à l'observation et à l'expérience qu'il est rationnel de les demander.

Très-généralement, l'exposition de cette partie de la mécanique qui traite de la communication du mouvement par les forces, est fondée sur quelque principe ou concept mathématique dont on se réserve de montrer plus tard l'accord avec les faits naturels. Outre que l'on oublie toujours d'établir ensuite cette concordance, il nous a semblé que cette méthode indirecte non-seulement présentait l'inconvénient de fonder la science mécanique sur une pétition de principe, disons le mot, sur une *hypothèse*, mais que, de plus, elle embarrassait l'entrée du domaine de la science de termes (comme celui de masse, par exemple) et de notions dont l'origine restait longtemps confuse et dont l'introduction, nécessaire pourtant, ne paraissait pas d'abord suffisamment justifiée. Nous nous éloignerons donc ici complètement de la route *suivie jusqu'ici* par nos devanciers, même les plus illustres,

et, comme le voulait Bacon, *« c'est à la nature elle-même que » nous demanderons la loi de la nature »* que le raisonnement mathématique développera ensuite, ou dont il tirera les conséquences et mesurera les effets.

Une force et un corps étant donnés, quel mouvement prendra celui-ci par suite de l'application de cette force pendant un temps déterminé? Tel est le problème général qu'il s'agit de résoudre.

Les anciens eurent, sans aucun doute, un soupçon de sa véritable solution; ce ne fut cependant que vers l'année 1638 que l'illustre *Galilée* mit en complète évidence la loi de la communication du mouvement par les forces, à l'aide d'expériences dont nous donnerons un aperçu.

38. *Expériences de Galilée.* — Le mode d'expérimentation de *Galilée* consista à laisser descendre librement le long de plans inclinés de 5 à 6 mètres de hauteur, des *sphères* de toute espèce de poids et de toute espèce de matière, sous toutes sortes d'inclinaisons. Bien qu'il n'eût à sa disposition que des moyens assez imparfaits de mesurer les durées des descentes, bien que la résistance de l'air, le frottement et la rotation même des sphères contribuassent à masquer la loi de ces descentes, son génie sut opposer l'une à l'autre ces causes d'erreurs, les atténuer ou en tenir compte, et saisir enfin la *loi* du phénomène que nous nous proposons de prendre pour la base fondamentale de ces notions.

On savait déjà, au temps de *Galilée*, mais nous allons montrer tout-à-l'heure, avec *Stevin*, que la *force* F qui tend à faire glisser un corps le long d'un plan incliné, était une fraction du poids P de ce corps exprimée par le quotient $\frac{h}{l}$ de la hauteur h de ce plan divisée par sa longueur l : il suffisait donc, pour faire varier la force F, qui mouvait un poids connu P, de faire varier l'inclinaison du plan le long duquel le poids P descendait.

Ainsi par exemple, les forces mouvantes F parallèles à la

longueur du plan, étaient le dixième, le vingtième, le centième du poids mobile, lorsque la longueur l du plan incliné était dix fois, vingt fois, cent fois sa hauteur h; et, évidemment, la force mouvante F restait *constante* pendant toute la durée d'une même descente, aussi bien que le poids P à mouvoir. Or, pour toutes les inclinaisons des plans, pour toutes les intensités des forces mouvantes et résistantes, et pour toutes les durées du mouvement, *Galilée* parvint à la loi suivante :

39. *Loi de Galilée. — Les espaces* e, *parcourus par un mobile qui descend librement la pente d'un plan incliné d'une quantité quelconque, sont proportionnels aux carrés des nombres* t *de secondes écoulées depuis le commencement de la descente.*

A la fin de la première seconde, l'espace parcouru en mètres est égal à

$$k \frac{h}{l}$$

h *étant la hauteur verticale et* l *la longueur totale du plan, ou* $\frac{h}{l}$ *le sinus de son inclinaison sur l'horizon, et* k *étant un nombre constant pour chaque point de la surface terrestre, et qui, à Paris, a pour valeur, en mètres*

$$k = 4^{m}.90448.$$

On pressent que la valeur ci-dessus de la constante k a été déterminée, depuis le temps de *Galilée*, avec plus de précision qu'il n'était permis à ce grand homme de le faire.

La loi de la descente d'un corps qui descend librement (sans rouler ni frotter) la pente d'un plan incliné, est donc comprise sous la formule générale suivante donnée par la nature elle-même, ainsi que le voulait Bacon :

$$e = k \frac{h}{l} t^2 = 4^{m}.90448 \frac{h}{l} t^2 \ . \ . \ . \ (11).$$

40. Pour déduire de cette loi celle de la
mouvement par les forces, il nous faut d
l'intensité de la force F, qui agit, en géné
cendre (sans frotter ni rouler) un mobile q
poids est P sur un plan dont la hauteur v
longueur totale $= l$. Nous y parviendrons
méthode aussi ingénieuse qu'elle est naï
prunterons à *Stevin*, l'un des fondateurs
canique, et qui écrivait en 1605.

41. *Théorème de Stevin.* — *Stevin* con
solide A B C (fig. 10).

Il imagine qu'une chaîne uniforme envelo
h et l de ce triangle de manière que tou
rieure se trouve appliquée à ces deux côt
partie inférieure pend librement au-desso
rizontale A B $= b$.

Il remarque alors que, en supposant qu
glisser, elle *doit*, cependant, demeurer en
si elle commençait à glisser d'elle-même
devrait continuer à glisser toujours puisq
de mouvement subsisterait, la chaîne se tr
l'uniformité de ses parties, distribuée tou
manière par rapport au triangle; — d'où r
tation perpétuelle; ce qui est évidemment

Il y a donc nécessairement équilibre entr
de la chaîne. Or, la portion pendante au-
est évidemment en équilibre d'elle-même.
la tendance à glisser de tous les poids appl
égale la tendance à glisser de tous les poi
longueur l. Donc, si p est le poids du
chaîne, $p l$ et $p h$ seront respectivement le
en contact avec l et h. Faisons $p l =$ P
tend à descendre le long du plan, et p
ou force verticale qui s'oppose à la desce
ou $m p l$ la fraction de P qui tend à f

parallèlement à l; on a, d'après le raisonnement de
:

$$pl = ph, \text{ ou } F = mP, \text{ donc } m = \frac{h}{l} = \frac{F}{P}$$

si, et comme nous l'avions énoncé plus haut (38) sans le
ntrer, *la tendance* F *d'un corps* P *à descendre le long
plan incliné est une fraction du poids* P *de ce corps
mée par le quotient de la hauteur* h *par la longueur* l
in.

le quotient $\frac{h}{l}$ étant le même que celui $\frac{F}{P}$, d'après
tion ci-dessus, on peut substituer celui-ci au premier
la formule (11), qui devient ainsi :

$$e = \frac{F}{P} kt^2. \tag{12}$$

Mise sous cette dernière forme, elle donne évidem-
l'espace e que, dans un temps t, une force constante F,
arcourir *dans sa direction propre* à un corps libre
e poids est P.

est d'ailleurs tout-à-fait générale ; car les effets pro-
ne changeraient pas par cela seul que la force mou-
F serait extérieure au corps P, au lieu d'être, comme
e cas du plan incliné, une partie du poids de ce mo-
La formule (12) *exprime donc l'effet fondamental d'une
constante quelconque* F, *ayant agi pendant une durée* t
n poids quelconque P ; et, dégagée de toute hypothèse,
t purement l'expression d'un fait physique.

s verrons bientôt avec quelle facilité on parvient à en
e toute la mécanique du mouvement d'un point, mais
d'entreprendre ces développements, et vu son impor-
il peut être utile de montrer comment on y parvient
lirectement encore, et sans recourir au théorème de
, à l'aide de l'appareil ingénieux inventé par Atwood,
786.

43. *Machine d'Atwood.* — Réduite à son principe ...
cette machine se compose d'une poulie évidée dont le ...
doit être, autant que possible, entièrement condensé ...
circonférence. Cette poulie tourne librement autour ...
axe A, et le frottement de cet axe, pendant le mouvement ...
la poulie, a été rendu négligeable à l'aide d'un remarquable
système de rouleaux inventé par le célèbre auteur de ...
machine, et que nous ne pouvons décrire ici. Sur la ...
de cette poulie, passe un fil assez long pour que les
extrémités reposent sur le sol en y laissant des excès
sants. Nous désignerons par f le poids de la partie ve...
de ce fil qui, avec la disposition que nous recomm...
ici, ne tend pas plus à faire tourner la poulie d'un cô...
de l'autre. Imaginons maintenant que vers la partie ...
rieure du brin gauche, on ait fixé un poids connu p', et ...
la partie supérieure du brin droit un autre poids p ...
plus grand que p', et égal par exemple à $p' + \varepsilon$, ε ...
un excès de poids déterminé. Il est clair qu'au moment ...
le système sera abandonné à lui-même, il tournera de ...
che à droite dans le sens de la flèche, le poids p desc...
tandis que p' montera d'une quantité égale par l'effet ...
rotation de la poulie dont l'adhérence du fil déter...
mouvement. On pourra donc, à l'aide d'instruments pré...
mesurer dans chaque expérience, l'espace e parcouru ve...
calement pendant un nombre de secondes et fractions de ...
conde t, soit par le poids descendant p, soit par le po...
montant p'.

La force mouvante F du système sera évidemment :

$$(p - p') = F$$

le poids P mis en mouvement se composera de $f + w +$ ...
$+ p'$, puisque la poulie a son poids total w sensiblem...
condensé dans sa circonférence. Faisons, pour abréger :

$$f + w + p + p' = P$$

Or, quels que soient la force mouvante F, et le poids m...

nés l'un et l'autre en kilogrammes, quels que soient le n parcouru e, exprimé en mètres, et la durée t du ement exprimé en secondes, toutes les expériences ront pour la loi générale du mouvement :

$$e = \frac{F}{P} k t^2 = \frac{F}{P} t^2 \times 4^m.90448$$

t un nombre constant qui, pour Paris, s'élève à $4^m.904$; 'on voit que :

espaces parcourus e *sont, pour un même temps* t, *nt plus grands, que la force mouvante est plus grande le poids mû* P *est plus petit.*

espaces parcourus e *croissent comme les carrés* t^2 *ombres de secondes écoulées pendant les durées des ements.* Ces mouvements sont donc du genre de ceux ous avons appelés *uniformément accélérés.*

la force mouvante F était le poids même P du corps n retomberait sur le cas déjà traité (§ 35), qui est pré ent celui de la *chute des corps libres dans le vide,* et $= 4^m.90448$ serait l'espace que le corps libre parcourt mouvement uniformément accéléré à Paris, pendant la ère seconde de la chute.

nous avons vu au même paragraphe que, dans le cas ouvement uniformément accéléré, ce nombre k de mè tait égal à la moitié de l'*accélération* (35). Désignant celle-ci par la lettre g universellement adoptée pour la senter dans le cas de la chute des graves, nous aurons :

$$k = \frac{1}{2} g = 9^m.80896$$

formule fondamentale qui exprimera la loi de la com cation du mouvement par les forces, prendra par cette itution la forme :

$$e = \frac{F}{P} \cdot \frac{1}{2} g t^2$$

Nous allons montrer, dans le chapitre suivant, tous les théorèmes fondamentaux de la mécanique vement peuvent être déduits de la relation ci-dessus elle-même par l'expérience.

CHAPITRE IV.

Théorèmes fondamentaux de la Mécaniqu mouvement des corps libres.

44. L'expérience et l'observation viennent de nou la loi fondamentale de la *communication du mouve les forces*. Sans hypothèse aucune, sans pétition de sans *postulatum*, sans demander aucune concessi sommes parvenus à ce résultat important exprim formule :

$$e = \frac{F}{P} \frac{1}{2} g t^2 = 4^m.90448 \frac{F}{P} t^2$$

qui donne la valeur en mètres e qu'une force cons agissant pendant t secondes sur un corps libre dont est P, aura fait parcourir à ce corps dans la directi de la force.

Ainsi une force de *un* kilogramme qui agirait pen seconde sur un corps libre pesant *un* kilogramme, l fait parcourir dans sa direction propre $4^m.904$ d'un ment uniformément accéléré.

Si la même force n'agissait, toutes choses égales d que pendant une demi-seconde, l'espace parcouru réduit, non pas à la moitié du précédent, mais au nombre constant $4^m.90448$, soit $e = 1^m.25112$; ca paces parcourus croissent comme les *carrés* des t.

Les forces mouvantes F et les poids mus P étant *quelconques*, les espaces parcourus dans un même *seront d'autant plus grands que la force mouvante grande et que le poids mû sera plus petit.*

Valeur des accroissements successifs de *du chemin ru* e. —Etudions maintenant plus intimement le mou- t du poids P, dont nous n'avons pour ainsi dire con- que le résultat *final*. Pour y parvenir, décomposons ée *t* du mouvement en éléments successifs dt tous entre eux ; et cherchons les espaces successifs de cor- dants à chacun des instants dt; ou, comme on a ıe de l'exprimer, *différentions* l'équation ci-dessus par t à l'espace *e* et au temps *t*. L'application pure et sim- la règle (32) nous donnera immédiatement la relation :

$$de = \frac{F}{P} gt.dt \tag{14}$$

:s accroissements successifs de, correspondants aux s successifs égaux dt, ne sont pas égaux. Ils aug- ıt non-seulement à mesure que la force mouvante F s grande, et le poids mû P plus petit, mais encore ı durée *t* écoulée depuis le moment où la force F a ncé à agir.

, force F n'agissait que pendant un seul et premier dt, on aurait, en désignant alors par ε le petit es- ırcouru à la fin de cet instant unique :

$$\varepsilon = \frac{F}{P} \cdot \frac{1}{2} g (dt)^2 \tag{15}$$

ce qui résulte évidemment de la formule fondamen- 3) en y mettant dt au lieu de *t*.

Valeur de la vitesse v *acquise au bout du temps* t. — ə la valeur générale de la vitesse est le quotient de de nous obtiendrons immédiatement la vitesse acquise poids P après que la force F a agi sur lui pendant *t* :s en divisant par dt les deux membres de l'équation qui donnera :

$$\frac{de}{dt} = v = \frac{F}{P} gt = \text{vitesse.} \tag{16}$$

Ainsi la vitesse croît, tant avec l'intensité de la force vante F, qu'avec la durée t de son action. Elle diminue a poids P du corps mû.

47. *Valeur de l'espace parcouru* e, *en fonction du écoulé* t, *et de la vitesse acquise* v. — Si, dans l'express l'espace e (13), on remplace $\frac{F}{P}gt$ par sa valeur v, c tient cette autre expression de l'espace :

$$e = \frac{1}{2}vt, \text{ d'où } v = \frac{2e}{t}$$

qui nous enseigne que : *l'espace parcouru par un soumis pendant un nombre de secondes* t *à l'action force d'intensité et de direction constantes est le prod cette durée* t *par la moitié de la vitesse* v *acquise à la ce temps.*

48. *Masse, quantité de mouvement, impulsion.* — gnons pour abréger par le nom de *masse* d'un corps, le tient du nombre P qui exprime en kilogrammes le po ce corps divisé par le nombre $g = 9.80896$, et n'atta d'abord à ce mot *masse* aucune espèce d'idée physiq métaphysique, si ce n'est celle que, en vertu de la défi elle-même, la masse M d'un corps est proportionne poids P de celui-ci, puisque l'on convient de faire :

$$M = \frac{P}{g}, \text{ ou } P = Mg$$

Cela posé, appelons *quantité de mouvement* le produ de la masse M d'un corps par sa vitesse actuelle v, et gnons en général par le mot *impulsion* le produit d'une F par la durée t de son action, la formule (16) dédu l'expérience et mise sous la forme :

$$\frac{P}{g}v = Mv = Ft$$

pourra être traduite par le théorème suivant :

La quantité de mouvement acquise est numériquement égale à l'impulsion dans le même temps et suivant la même direction.

Si l'on différentie l'équation précédente (règle 32) par rapport à la vitesse v et par rapport au temps, on aura :

$$\frac{\mathrm{P}}{g}\,dv = \mathrm{F}\,dt. \qquad (20)$$

Le premier terme est appelé *quantité de mouvement élémentaire*, et le second *impulsion élémentaire*. Ainsi, il y a encore égalité numérique entre les quantités de mouvement et les impulsions élémentaires de même direction.

29. *Principe de la proportionnalité des accroissements de vitesse à l'intensité des forces.* — La plupart des auteurs ont basé l'étude de la mécanique sur cette *proportionnalité*, dont ils font un *postulatum* qu'ils demandent qu'on leur accorde, les uns en se fondant sur l'*opinion* unanime des géomètres, les autres, sur ce que cette loi de la *proportionnalité* est au moins la *plus naturelle*. Cette marche a l'inconvénient grave de présenter une vérité fondamentale sous la forme d'une hypothèse seulement *probable* et pouvant toujours dès lors être contestée. La formule précédente mise sous la forme

$$dv = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{P}}\,g\,dt = \frac{\mathrm{F}}{\mathrm{M}}\,dt$$

déduite de la seule observation et pure de toute hypothèse, montre avec évidence que les *accroissements* dv *de la vitesse correspondants à chaque instant* dt *de la durée de l'action de la force, croissent comme l'intensité de cette force* F et *décroissent à mesure que la masse* M *augmente*; et le principe théorique de la proportionnalité des forces aux accroissements de la vitesse passe ainsi de l'état de concept scientifique à celui de *fait* réel, physique, que les praticiens ne peuvent révoquer en doute.

30. *Principe de l'indépendance entre le mouvement acquis*

et l'effet des forces. — On admet encore à titre de *principe* que : *si un corps ayant déjà une vitesse* v *vient à être sollicité par une force* F, *le mouvement qu'il acquerra en vertu de la seule action de cette force sera le même que si le corps n'eût pas eu de vitesse lorsque la force a commencé à agir sur lui.* Or, c'est encore là un *fait* plutôt qu'un principe que la formule

$$dv = \frac{F}{P} g dt = \frac{F}{M} dt \qquad (21)$$

rend très-évident. En effet, cette valeur de l'accroissement dv de la vitesse ne renferme, ni la durée t de l'action de la force, ni aucune vitesse précédemment acquise, ou, pour nous servir de l'expression consacrée, cette valeur est *indépendante* de t et de v. L'accroissement de la vitesse est donc le même, soit au commencement, soit à la fin, soit à toute autre époque de cette durée t; le même dès lors, lorsque le corps part du repos, lorsqu'il a déjà une vitesse quelconque et lorsqu'il a acquis sa plus grande vitesse. Ainsi l'accroissement positif ou négatif de vitesse que reçoit une masse donnée M, ne dépend que de l'intensité de la force F qui agit sur elle, et elle est complètement indépendante de la vitesse que cette masse pourrait déjà posséder dans la direction de la force mouvante.

51. *Remarque.* — Il est bon de remarquer qu'il n'en est pas de l'accroissement dv de la vitesse, comme de l'accroissement de du chemin parcouru, lequel, ainsi que nous l'avons vu (§ 45), augmente, avec la durée t, ou mieux a une partie qui augmente avec cette durée. En effet, l'accroissement du chemin de à une époque quelconque du mouvement, après la durée t, par exemple, est en effet la somme de deux petits chemins, l'un que nous avons désigné par ε (15) et qui est dû à la seule action de la force F pendant l'instant dt, l'autre $(de - \varepsilon)$ qui est dû à la vitesse antérieurement acquise par le mobile au moment que l'on considère,

et qu'il parcourrait en vertu de son inertie quand bien même la force F cesserait d'agir sur lui. Or, la petite longueur $(de - \varepsilon)$ augmente avec le temps écoulé t, tandis que ε conserve toujours la même valeur (15) pour chacun des instants dt du mouvement, tant que la force F reste constante d'intensité et de direction, ce que nous supposons toujours ici. Nous tirerons de cette remarque une autre expression de l'accroissement de vitesse dv qui est commode dans certaines circonstances; dv peut, en effet, être considéré comme la vitesse finale acquise par le mobile à la fin du temps dt, et la force étant constante, on a, d'après le théorème (§ 47) :

$$\varepsilon = \frac{1}{2} dv dt, \text{ d'où } dv = \frac{2\varepsilon}{dt} = \frac{F}{P} g dt \qquad (22)$$

52. *Accélération.* — Nous obtiendrons évidemment la quantité appelée *accélération* (2) en divisant par dt les deux membres de l'équation (23). Appelant φ cette accélération, nous aurons donc en général :

$$\frac{dv}{dt} = \varphi = \frac{F}{P} g = \frac{F}{M} = \frac{\text{Force}}{\text{masse}} \qquad (23)$$

de sorte que *pour obtenir la valeur numérique de l'accélération dans un mouvement quelconque, il nous suffira de diviser la force mouvante par la masse,* et l'accélération de la masse M sera constante ou variable, selon que la force mouvante sera elle-même constante ou variable.

53. *Remarque sur la notion de la masse.* — On peut remarquer que les formules (23) (16) (21) reviennent au fond aux *proportions* suivantes :

$$P : g :: F : \varphi, \quad \text{ou } \varphi = \frac{F}{P} g$$

$$P : g \times t :: F : v, \quad \text{ou } v = \frac{F}{P} g t$$

$$P : g \times dt :: F : dv, \text{ ou } dv = \frac{F}{P} g dt$$

de sorte que, en fait (et souvent sans que nous en ayons co science), il arrive que lorsque nous voulons obtenir soit l'a célération φ, soit la vitesse v, soit l'accroissement de vites dv, qu'une force supposée constante F imprimera à un cor libre, d'un poids connu P, nous nous demandons réellemen 1° quelle accélération g, quelle vitesse gt, ou quel accroi sement de vitesse gdt, ce même corps P, supposé libre, r cevrait, soit en une seconde, soit dans le temps t, soit se lement dans l'élément du temps dt de l'*action de son prop poids*; puis 2° les expériences de Galilée nous ayant révélé grande loi physique de la proportionnalité entre les forc et les vitesses, nous ne faisons rien autre chose que de ca culer le 4e terme des *proportions* ci-dessus.

C'est donc la nécessité de rapporter les circonstances d'u mouvement quelconque aux mesures *absolues* que no donne, *seule*, la chute des graves, qui introduit dans tout ces proportions ou expressions, l'inévitable rapport P : ou quotient $\frac{P}{g} = M$. La *masse* n'est donc pour nous, ri de plus ni rien de moins qu'un *quotient*; et nous ne savo pas, ni n'avons heureusement aucun besoin de savoir si, com me le veulent les physiciens et les métaphysiciens, la mas $M = \frac{P}{g}$ d'un corps dont le poids est P, est ou n'est pas *quantité de matière* dont il se compose.

23. *Constance de la masse.* — Le poids d'un même cor n'est pas le même dans tous les lieux où ce corps peut êt transporté, mais sa masse est constante. L'attraction que terre exerce sur ce corps diminue en effet avec la distance ce corps à sa surface, lorsqu'il est transporté de bas en ha sur la même verticale; elle diminue aussi par l'effet d'u *cause* que nous ne pouvons étudier ici, à mesure que la l *titude* diminue. Le corps a donc en général deux poids d

férents P, P' en deux lieux différents, mais, comme les accélérations $g\,g'$, qui correspondent à ces deux lieux, varient elles-mêmes dans le rapport de ces poids, les quotients

$$\frac{P}{g} = \frac{P'}{g^1} = M$$

restent constants, de sorte que la masse M d'un corps est la même en tous lieux; et en général, on passera du poids P d'un corps à sa masse M, en multipliant ce poids par le nombre

$$\frac{1}{g} = 0.10194$$

de sorte que, *dans une approximation, on peut prendre pour la masse d'un corps le dixième de son poids exprimé en kilogrammes.*

55. *Valeur générale de la force d'inertie.* — Si nous mettons l'expression (23) sous la forme

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt} = \frac{P}{g}\,\varphi = M\,\varphi \qquad (24)$$

nous obtiendrons la valeur générale de la force mouvante F en fonction de la masse et de l'accélération. Or, cette force F est nécessairement égale et de signe contraire à la force d'inertie (§ 16), avec laquelle la masse M résiste à l'accélération φ. Donc, l'expression générale de l'intensité de la *force d'inertie sera le produit de la masse par l'accélération,* et quant au *sens* de cette force, il sera toujours directement contraire à celui de la force mouvante.

On obtiendrait encore de la formule (22) une autre valeur de la force d'inertie, exprimée en fonction du petit chemin ε que la force mouvante, supposée constante, tend à faire parcourir à la masse M dans le temps dt, et qui est souvent commode. Nous aurons donc en général cette double valeur :

$$\text{Force d'inertie} = \frac{P}{g}\frac{dv}{dt} = \frac{P}{g} \cdot \frac{2\,\varepsilon}{(d\,t)^2} \qquad (25)$$

laquelle exprimera en kilogrammes la réaction que la mass $M = \frac{P}{g}$ oppose à son changement d'état.

56. *Travail des forces d'inertie; équation des forces vive* — On est convenu d'appeler *force vive* d'une masse à un in stant donné, le produit de cette masse M par le carré v^2 de l vitesse v dont elle est animée à l'instant que l'on considère ou bien encore le produit de cette vitesse par sa *quantité* *mouvement* (§ 48). Cette dénomination de *force vive*, qui da de *Leibnitz*, est, comme beaucoup d'autres expressions d langage mécanique, très-malheureusement choisie; la *for* vive, en effet, n'est point une *force* dans le sens que no avons donné à ce mot (§ 5); elle ne se mesure pas en *kil* *grammes;* et on va voir qu'elle est le résultat du *trava* d'une force mouvante F sur une masse qui cède à l'action d cette force. Reprenons en effet la formule (24)

$$F = \frac{P}{g} \cdot \frac{dv}{dt}$$

et soit toujours de le petit chemin que la force F fait pa courir pendant l'instant dt à la masse M et dans sa directio propre, à une époque quelconque du mouvement. Si no multiplions par de les deux membres de l'égalité ci-dessu il viendra :

$$F\,de = \frac{P}{g} \cdot \frac{de}{dt} \cdot dv = \frac{P}{g}\,v\,dv \qquad (2$$

puisque $\frac{de}{dt}$ est (§ 26) la valeur générale de la vitesse v. O le premier membre de cette équation est le *travail* (§ de la force F, le long du petit chemin de parcouru par so point d'application dans sa direction propre, et le second e le *travail* résistant de la force d'inertie de la masse M le lon du même chemin. Donc, si, conformément à la règle (33 nous faisons les sommes de ces petits travaux élémentaire il viendra :

$$Fe = \frac{1}{2}\frac{P}{g}v^2 = \frac{1}{2}Mv^2 \qquad (27)$$

de là ce théorème très-fécond : *la moitié de la force vive* Mv^2, *acquise par un mobile, est numériquement égale au travail* Fe *de la force* F *qui l'a produite*.

Réciproquement, pour anéantir la force vive Mv^2 d'une masse $\frac{P}{g}$ animée d'une vitesse v, il faudra dépenser contre cette masse, suivant la direction de sa vitesse, un travail Fe ou un nombre Fe de kilogrammètres égal à la moitié de cette force vive.

Il doit paraître évident que, dans la formule précédente, on peut substituer à Fe tout autre produit $F'e'$, d'une autre force F', par un autre chemin e', pourvu que l'on ait la relation :

$$F'e' = Fe, \text{ où } \frac{F'}{F} = \frac{e}{e'} \qquad (28)$$

c'est-à-dire, pourvu que les intensités des forces soient réciproques aux chemins parcourus dans leurs directions propres. Des travaux égaux développeront toujours la même force vive dans un même corps libre.

On voit enfin que la force vive acquise par une masse n'est point une force, mais bien une sorte de magasin de *travail* disponible ; ce qui faisait dire avec raison à Jean Bernoulli : « *Vis viva non consistit in actuali exercitio, sed in facultate agendi.* »

57. Il pourrait arriver qu'avant de subir le travail Fe de la force F, la masse $M = \frac{P}{g}$ possédât, suivant la direction de ce travail, une vitesse antérieure que nous désignerons par u, et dès lors, une force vive primitive Mu^2. Soit alors V la vitesse totale qui anime la masse M à la fin de la durée de l'action de la force F, et lorsqu'elle a parcouru le chemin

rectiligne e sous l'action de cette force, il doit
dent que le travail $F e$ n'aura produit que la
variation $\left(\frac{1}{2} M V^2 - \frac{1}{2} M u^2\right)$, et que l'o
ce cas :

$$F e = \frac{1}{2} \frac{P}{g} (V^2 - u^2)$$

formule qui suppose essentiellement que le tra
vitesses finale et primitive V et u sont de mê
(§ 7).

58. Sur quoi, il peut être bon de mettre ici l
teurs en garde contre l'erreur qu'ils pourraient
confondant la *force vive acquise* $M (V^2 - u^2)$ ave
due à la vitesse acquise $(V - u)$, et qui aurait po
$M (V - u)^2$. La première quantité plus grande q
de l'excès $2 u (V - u) M$, ne peut être confon
que dans le cas particulier où la vitesse antéri
nulle.

Cette observation trouverait au besoin son e
fait que l'illustre *Daniel Bernoulli* a parfois éc
expressions à la place de l'autre dans son *Hyd*
erreur d'un grand homme que Borda releva en
mie des sciences, page 591).

59. *Récapitulation.* — Si nous récapitulons m
formules fondamentales que nous avons success
tenues, et si nous éliminons entre elles tour à t
tités, espace, vitesse, temps, accélération, for
merons le tableau suivant qui résume tous le
force constante F agissant pendant un nombre
sur un corps libre dont le poids est $P = M g$,
parcouru, et v la vitesse acquise *à la fin* du
partir du repos. Nous ferons tout-à-l'heure qu
cations numériques de ces formules ; on trouver
Aide-mémoire des ingénieurs, des application
rales :

$$= \frac{F}{P}\frac{1}{2}gt^2 = \frac{v^2}{2g}\frac{P}{F} = \frac{v^2}{2\varphi} = \frac{1}{2}\varphi t^2 = \frac{1}{2}tv. \quad (30)$$

$$= \frac{F}{P}gt = \sqrt{2ge\frac{F}{P}} = \sqrt{2\varphi e} = \varphi t = \frac{2e}{t}. \quad (31)$$

$$= \frac{P}{F}\frac{v}{g} = \sqrt{\frac{2e}{g}\frac{P}{F}} = \frac{v}{\varphi} = \sqrt{\frac{2e}{\varphi}} = \frac{2e}{v}. \quad (32)$$

$$= g\frac{F}{P} = \frac{v}{t} = \frac{2e}{t^2} = \frac{v^2}{2e} = v\sqrt{\frac{g}{2e}\frac{F}{P}}. \quad (33)$$

$$= \frac{P}{g}\frac{2e}{t^2} = \frac{Pv^2}{2ge} = \frac{P\varphi}{g} = \frac{Pv}{gt} = \frac{\varphi^2}{v^2}\frac{P}{g}2e. \quad (34)$$

CHAPITRE V.

Problèmes et Exercices.

60. *Chute verticale des corps libres dans le vide.*—La force qui précipite un corps libre et dans le vide vers la surface la terre, n'étant autre chose que son poids P, on aura évi-ment tous les effets de la descente verticale d'un corps re, en faisant $F = P$ dans toutes les formules du tableau dessus; ce qui en fera simplement disparaître les quotients et $\frac{P}{F}$ qui se trouvent ainsi réduits à un facteur $= 1$.

1. Mais il y a lieu de considérer le cas où le corps libre ait d'abord lancé verticalement *de bas en haut.*

oit donc v' la vitesse avec laquelle un poids P est ini-ement projeté de bas en haut et suivant la verticale, v'^2 sera sa force vive initiale; mais le poids P agissant aut en bas avec une intensité constante pendant toute la ée de l'ascension, on obtiendra la plus grande hauteur h quelle le mobile puisse parvenir, en écrivant que le tra-

vail Ph a anéanti la demi-force vive ci-dessus, ou qu'
être numériquement égal à celle-ci; d'où résulte :

$$Ph = \frac{1}{2} \frac{P}{g} v'^2, \text{ ou } h = \frac{v'^2}{2g}, \text{ et } v' = \sqrt{2gh}$$

Ainsi, $\frac{v'^2}{2g}$ *est la hauteur maximum à laquelle parvie*
un corps animé d'une vitesse initiale v'^2; *et réciproque*
pour qu'un mobile atteigne, dans le vide, une hauteur
faut lui imprimer une vitesse initiale et verticale $= \sqrt{}$
ce qui exige que l'on dépense d'abord sur ce mobile u
vail Ph, ou tout autre travail équivalent $F'e' = Ph$ kilog
mètres.

62. On a coutume d'appeler h la *hauteur due* à la vites
et v' la *vitesse due* à la hauteur h, lorsque ces quantités
liées par les relations (*) $h = \frac{v'^2}{2g} = 0.05097\, v'^2$, et
$\sqrt{2gh} = 4.4292 \sqrt{h}.$

63. Le poids P étant maintenant supposé initiale
animé de la vitesse verticale v', si nous désignons pa
vitesse variable qui lui restera à la fin de la durée que
que t', il est clair que cette vitesse u sera égale à la v
initiale v', diminuée de la vitesse gt' (31), que le poi
corps aura détruite dans le temps t', ainsi :

$$u = v' - gt', \text{ et } \frac{du}{dt'} = \varphi = -g.$$

Donc la vitesse restante u sera nulle et le corps ne
tera ni ne descendra à l'instant précis déterminé p
condition :

$$v' - gt' = o, \text{ soit } t' = \frac{v'}{g} = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

(*) On trouvera dans mon *Aide-mémoire des ingénieurs*, une table très-éte
ces relations.

64. Cette valeur de t' est donc la durée totale de l'ascension.

Si l'on voulait connaître la hauteur verticale x parcourue de bas en haut par le mobile au moment où, après un temps t', il lui reste la vitesse u, il suffirait de remarquer que, si la vitesse initiale v' pouvait persister, le mobile parcourrait $v't'$ dans le temps t', mais pendant cette même durée son poids le fait descendre de $e = {}^1/_2\, g t'^2$, il est donc au bout du temps t' à une distance verticale x de son point de départ exprimée par :

$$x = v't' - \frac{1}{2}\, g t'^2 \tag{38}$$

En mettant dans la relation précédente la valeur $\frac{v'}{g}$ de t', qui exprime la durée de l'ascension totale, on retomberait naturellement sur :

$$x = \frac{v'^2}{2g} = h = \text{hauteur maximum.} \tag{39}$$

Or, pour tomber dans le vide d'une hauteur h par la seule action de son poids, un mobile emploierait un temps t donné par

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}},\ \text{donc}\ t = t' \tag{40}$$

et le mobile, dans le vide, emploie le même temps à monter qu'à descendre ; de sorte que :

$$\frac{2v'}{g} = \mathrm{T} = t + t^1 = 2t \tag{41}$$

serait la durée totale T de la montée et de la descente.

65. Ainsi, si la résistance de l'air ne venait pas modifier considérablement les résultats, on aurait une mesure de la vitesse initiale v' d'une balle de fusil, en tirant l'arme verticalement de bas en haut, et comptant à l'aide d'un chro-

nomètre la durée T écoulée entre le départ de la balle et son retour à terre :

$$v' = \text{vitesse initiale} = \frac{gT}{2} = 4^m.90448 \times T \quad (42)$$

66. On évalue à 454 mètres la vitesse initiale de la balle du fusil de munition à pierre, lorsqu'elle est chassée par la cartouche réglementaire. Si cette balle pouvait être tirée verticalement et dans le vide, il s'écoulerait donc environ 92 secondes 1/2 entre le départ et le retour, soit en nombre rond *une minute et demie*, et la plus grande hauteur h que le projectile atteindrait, dans le vide, dépasserait 10500 mètres ou plus de deux lieues et demie.

Le poids P de cette balle $= 0^k.0256$, sa masse $M = \frac{P}{g}$ est donc $= 0.0026$; et le carré de sa vitesse initiale étant $v'^2 = 206116$, sa force vive au sortir de l'arme est exprimée par $M v'^2 = 535.90$, nombre dont la moitié (27) serait le *travail* Fe ou le nombre de kilogrammètres $= 267.95$ dépensés par la poudre contre la balle pendant qu'elle a parcouru la longueur e du canon de l'arme, s'il n'y avait eu aucun recul.

Il est extrêmement probable que la force F, qui entre dans ce produit Fe, est loin d'être constante, mais F étant considérée comme telle ou comme une sorte de *moyenne* entre toutes les pressions variables que la poudre a pu exercer contre la balle, pendant qu'elle a parcouru la longueur e du canon, qui diffère peu de 1 mètre, on voit que cette pression moyenne F contre la balle s'élèverait à 268 kilogrammes environ.

Le diamètre D de cette balle ayant $0^m.0163$ et l'aire $0.785 D^2$ de l'un de ses grands cercles $= 0^{mm}.000208$, ou environ deux *centimètres* carrés ; la balle est donc soumise dans le canon à une pression *moyenne* équivalente à 134 kilogrammes par centimètre carré de section transversale.

Or, l'atmosphère pressant tous les corps qui y sont plongés, avec un effort d'un peu plus de 1 kilogramme par centimètre carré ($1^k.033$), on peut dire que la balle, pendant qu'elle parcourt le canon, y est soumise à une pression moyenne de *cent trente* atmosphères en nombre rond.

Cependant, la force vive considérable $Mv'^2 = 535.90$, que cette balle a acquise, ne lui permet pas de traverser un madrier de chêne de $0^m.10$ d'épaisseur e^1 placé à la bouche du canon; ce madrier oppose donc à la *pénétration* une résistance *moyenne* F' telle que l'on a :

$$F' \times 0.10 = 268 \text{ kilogrammètres},$$
$$\text{d'où } F' = 2680 \text{ kilogrammes},$$

pression qui, divisée par l'aire transversale de la balle, donnerait, si celle-ci ne se déformait pas, une résistance de 1340 kilogrammes par centimètre carré.

Enfin, la résistance totale F' étant ainsi évaluée, nous pouvons en déduire approximativement la durée t de la pénétration par la relation (19) :

$$F't = Mv', \text{ d'où } t = \frac{Mv'}{F'} = \frac{1.18}{2680} \qquad (43)$$

Ainsi, cette durée serait moindre qu'un demi-millième de seconde.

Nous n'hésiterons pas à présenter encore quelques exemples de l'emploi de ces formules, car les applications sont la seule voie par laquelle on s'élève à la véritable intelligence des théories; et c'est, sans aucun doute, parce que l'enseignement les a trop négligées depuis un demi-siècle que tant de notions nuageuses, sur le mouvement et sur les forces, obscurcissent encore l'esprit des élèves sortis de nos plus hautes écoles (*).

(*) Cette opinion pourrait sembler plus sévère que juste si, d'une part, un rapport officiel ne constatait pas (page 32) que « un grand nombre d'élèves de l'École polytechnique ne comprennent pas du tout le sens exact de telle ou telle partie

67. Problème. — *Quel travail dépenserait-on pour élever, à une hauteur verticale* H $=24$ *mètres, l'une des extrémités d'une chaîne uniforme reposant d'abord sur le sol, dont le poids* p *par mètre courant* $=4$ *kilogrammes, et qui aurait précisément* 24 *mètres de longueur* H ?

Soit dh une portion infiniment petite de la longueur de la chaîne, $p\,dh$ sera son poids. Lorsqu'une longueur quelconque h de la chaîne pend au-dessous de dh, $ph\,dh$ est évidemment le travail qui a été dépensé sur cette portion dh pour l'élever à la hauteur h.

$\int ph\,dh$ sera donc la somme des travaux partiels dépensés pour élever l'extrémité de la chaîne à la hauteur h. Donc, lorsque h deviendra H, ou lorsque cette extrémité atteindra la hauteur fixée H, on aura, pour le travail total T dépensé (33) :

$$T=\int pH\,dH=\frac{1}{2}pH^2=pH\times\frac{1}{2}H=96^{\text{kil.}}\times12^{\text{m.}}$$
$$=1152 \text{ kilogrammètres.}$$

C'est le travail qui serait nécessaire pour élever en corps le poids total pH de la chaîne à la moitié de la hauteur H.

68. De même, pour pousser de haut en bas le niveau d'un liquide dont le mètre cube pèserait ϖ kilogrammes jusqu'au sommet d'un tube cylindrique vertical, d'une hauteur h et d'une section constante a, on trouverait qu'il faut dépenser un travail T :

$$T=\frac{\varpi a h^2}{2}\text{ kilogrammètres} \qquad (44)$$

l'enseignement qui leur est donné » ; et si, d'autre part, l'illustre Poisson, (page 41) de son rapport de 1837, n'avait textuellement écrit que « dans la mécanique, il ne » faut rien leur demander (aux élèves) en dehors des formules, et rien non plus sur la » manière de les convertir en nombres. Ils ne se font (dit-il) aucune idée des diverses » quantités qu'elles renferment. J'ai déjà, ajoute-t-il, plusieurs fois signalé ce grave » inconvénient. » (Voyez le *Rapport sur l'enseignement de l'École polytechnique*, adressé au ministère par la commission mixte, 1850, imprimerie nationale.)

équivalent à celui qu'exigerait l'élévation en corps de tout le liquide à la hauteur $\frac{h}{2}$ qu'occupe son centre de figure.

69. Or, le niveau du liquide ayant maintenant atteint l'orifice supérieur du tube, on voit que, pour qu'une tranche, eût-elle une épaisseur infiniment petite dh, puisse seulement franchir cet orifice, il faudra introduire, par la partie inférieure du tube, une tranche de même épaisseur dh; c'est-à-dire, en fait, soulever de dh toute la colonne liquide dont le poids est ϖah, ou faire un travail T':

$$T' = \varpi ah \,.\, dh = \varpi adh \,.\, h \tag{45}$$

équivalent à celui qui consisterait à transporter directement le poids ϖadh de la tranche à la hauteur totale h, c'est-à-dire de la partie inférieure jusqu'à la partie supérieure du tube. Le remplissage préalable du tube, qui pourtant a exigé d'abord une dépense T kilogrammètres, ne diminue donc en rien le travail nécessaire pour qu'un poids quelconque de liquide franchisse l'orifice supérieur et puisse être recueilli dans un réservoir; travail qui sera toujours (quoi qu'on fasse et quelque machine qu'on emploie) au moins égal au produit du poids du liquide recueilli multiplié par la différence h des niveaux inférieur et supérieur.

70. Ainsi encore, pour qu'un jet d'eau vertical, pour qu'une pompe à incendie projette 15 litres ou 15 kilogrammes d'eau à 20 mètres de hauteur, il faudra que, d'une manière ou d'une autre, il soit dépensé sur le système au moins $15 \times 20 = 300$ kilogrammètres; et, si ce débit doit être renouvelé dans chaque *seconde*, l'appareil d'élévation, quel qu'il soit, et abstraction faite de toutes les résistances qui sont étrangères à l'effet utile, exigera qu'on lui applique, pendant toute la durée de son action, un travail $= 300$ kilogrammètres par seconde correspondant à une machine dite de 4 chevaux (12).

71. *Travail d'une machine soufflante.* — La machine soufflante *communément* employée dans les usines métallurgiques

se réduit en principe (fig. 12) à un cylindre A et à un réservoir ou régulateur R mis en communication par des soupapes S', S'''. Dans le cylindre se meut alternativement de haut en bas et de bas en haut un piston de même diamètre, et le cylindre pouvant être mis alternativement en communication avec l'atmosphère par les soupapes S S'', voici, à peu près, les effets qui se produisent :

Supposons que le piston descende ; il tend d'abord à faire le vide en arrière ; mais l'atmosphère exerçant, sur tous les corps qui y sont plongés, une pression par mètre carré = 10330 kilog. $= p_0$, ouvre la soupape S et remplit d'air, à la pression p_0, la capacité que le piston abandonne.

A mesure que le piston chemine de haut en bas, il comprime l'air de plus en plus au-dessous de lui, et lorsque cet air se trouve assez comprimé pour dépasser quelque peu la pression par mètre carré p' du régulateur R, la soupape S' s'ouvre et le piston chassant à travers S' un volume d'air à la pression p', égal à celui qui sort du régulateur R par la *buse a*, la tension p' reste sensiblement constante dans ce régulateur, au moins depuis l'instant où l'air du cylindre a acquis la pression p' jusqu'à celui où le piston touche le fond du cylindre.

Parvenu à cette limite de sa *course*, le piston remonte, tend à faire le vide dans la partie inférieure du cylindre ; l'atmosphère, dont la pression s'exerce dans tous les sens, soulève la soupape S'' et laisse entrer dans la partie inférieure du cylindre de l'air atmosphérique à la pression p_0 ; la soupape S', soumise à une pression par mètre carré $= (p' - p_0)$, se ferme et dès que, dans la partie supérieure du cylindre, l'air a acquis une pression p' un peu plus grande que celle du régulateur, la soupape S''' s'ouvre, et il entre encore dans ce régulateur R autant d'air condensé à la pression p' qu'il en sort par la buse *a*.

De là, trois problèmes que les théories précédentes nous *mettent en* état de résoudre, savoir :

72. *Déterminer : 1° le travail nécessaire pour amener le volume d'air introduit par l'atmosphère de la pression par mètre carré* $p_0 = 10330$ *kilogrammes jusqu'à la pression* p' *du régulateur ; 2° le travail nécessaire pour faire passer l'air, ainsi condensé à la pression* p', *de la partie aval du piston dans le régulateur* R *où l'on supposera que la pression* p' *reste constante ; 3° la vitesse* u *et le poids d'air* P *qui passe en une seconde par la buse.*

Nous appellerons v_0 le volume d'air à la pression p_0 qui remplit d'abord le cylindre sous l'influence de la pression atmosphérique, v' ce que devient le volume v_0 lorsqu'il a acquis le ressort p', A l'aire du piston, a la section de la buse, h_0 la course totale du piston, h' la partie de cette course totale qui lui reste à parcourir au moment où v_0 a acquis le volume plus petit v' correspondant à la pression p'. Enfin, nous désignerons par v, p, h le volume v et la pression p de l'air en aval du piston à l'instant *quelconque* où il lui reste à parcourir le chemin quelconque h pour achever sa course. On a donc :

$$v_0 = \mathrm{A}h_0 ;\ v' = \mathrm{A}h' ;\ v = \mathrm{A}h ; \tag{46}$$

$$\text{d'où } \frac{v_0}{v'} = \frac{h_0}{h'}, \text{ et } \frac{v_0 - v'}{v_0} = \frac{h_0 - h'}{h_0}. \tag{47}$$

On sait d'ailleurs, par la loi dite de *Mariotte*, que lorsque la température ne change pas (et nous supposerons toujours ici qu'elle est zéro), le produit du volume occupé par l'air multiplié par la pression qu'il exerce sous ce volume, reste constant. On a donc encore :

$$v_0 p_0 = v'p' = vp. \tag{48}$$

Cela posé, cherchons d'abord le travail de condensation.

73. *Travail exigé par la condensation.* — A l'origine du mouvement du piston, et lorsqu'un volume v_0 vient d'entrer dans le cylindre, la pression totale exercée sur la face aval du piston est évidemment A p_0. Lorsqu'au contraire cette face

aval est parvenue à la distance h de l'extrémité de sa cour la pression qu'elle subit devient, en vertu de la loi de M riotte :

$$A p_0 \times \frac{h_0}{h} \quad (4$$

Multipliant cette pression par le petit chemin dh que p court à cet instant même la face du piston, nous aur donc pour l'expression du travail élémentaire de conden tion :

$$A p_0 h_0 \cdot \frac{dh}{h} \quad (5$$

Faisant la somme de ces travaux élémentaires (Règle depuis l'instant où $h = h_0$ jusqu'à celui ou $h = h'$, il vi pour le travail T' de condensation ou de compression :

$$T' = A p_0 h_0 \int_{h'}^{h_0} \frac{dh}{h} = A p_0 h_0 \text{ [log. hyp. } h_0 - \text{log. hyp.}$$

$$= A p_0 h_0 \text{ log. hyp.} \frac{h_0}{h'} \quad ($$

ou bien encore en remplaçant le quotient des hauteurs celui des volumes ou par celui des pressions qui leur corr pondent, et les logarithmes hyperboliques par les logarithn vulgaires.

$$T' = p_0 v_0 \text{ log. hyp.} \frac{v_0}{v'} = 2.3026\ p_0 v_0 \text{ log.} \frac{v_0}{v'}$$

$$= 2.3026\ p_0 v_0 \text{ log.} \frac{p'}{p_0} \quad ($$

Ainsi pour condenser *un* mètre cube d'air ($v_0 = 1$) en demi-mètre cube ($v' = 1/2$), ce qui élèverait sa tension mètre carré de $p_0 = 10330$ kilog. à $p' = 2\ p_0 = 20660$ kil il faudrait dépenser un travail :

$$T' = 10330 \times 2.3026 \text{ log. } 2 = 23785.858 \times 0.3010$$

$$T' = 7358.69 \text{ kilogrammètres.}$$

C'est là le travail absolu qu'exigerait la réduction d'un mètre cube d'air à la moitié de son volume primitif, mais il s'en faudrait de beaucoup que ce fût le travail à transmettre à la tige du piston dans le cas de la machine qui nous occupe. On voit facilement en effet que le poids de l'atmosphère agissant en amont du piston vient en aide à celui-ci et diminue le travail à transmettre à sa tige pendant la condensation de :

$$A p_0 (h_0 - h') = p_0 (v_0 - v') = \text{kilogrammètres} \quad (53)$$

de sorte que le travail T_c à transmettre à la tige pour opérer la condensation se réduit en général à :

$$T_c = p_0 v_0 \left(\text{log. hyp. } \frac{v_0}{v'} - \frac{(v_0 - v')}{v_0} \right) \quad (54)$$

et, dans les conditions numériques que nous avons admises, se réduirait à 7358.69 — 5165 = 2193.69 kilogrammètres.

74. *Travail d'expulsion.* — Quant au travail qu'il faudra maintenant dépenser pour faire passer le volume condensé v' dans le réservoir R, il est clair que la face aval du piston étant, par hypothèse, constamment soumise à une pression p' par mètre carré, subira une résistance $A p'$ le long du chemin h' et devra faire dès lors un travail :

$$A p' h' = p' v' = p_0 v_0 \quad (55)$$

or, ici encore la pression atmosphérique vient en aide au piston en le pressant à l'amont et lui apporte un travail :

$$A p_0 h' = p_0 v' \quad (56)$$

le travail T_e à transmettre à la tige du piston, abstraction faite de toute autre résistance, pour opérer l'expulsion, se réduit ainsi à :

$$T_e = p_0 (v_0 - v') \quad (57)$$

Or, ce travail est précisément égal à celui qui est exprimé *par le terme soustractif* de la formule (54). Il en résulte

que, en désignant par T le travail à transmettre à la t du piston, tant pour réduire le volume v_0 au volume v' pour faire passer ce volume à la pression p' dans le réser R, on aura définitivement :

$$T = p_0 v_0 \text{ log. hyp. } \frac{v_0}{v'} = 2.3026 \; p_0 v_0 \text{ log. } \frac{v_0}{v'}$$
$$= 2.3026 \; p_0 v_0 \text{ log. } \frac{p'}{p_0}$$

75. *Simplification.*—Mais il s'en faut bien que, dans le des machines soufflantes, on condense l'air à la moitié son volume primitif, et, pour la plupart des hauts-fourne au charbon de bois, il suffit que p' soit $= p_0 \left(1 + \frac{1}{15}\right.$ en résulte :

$$\frac{v_0}{v'} = \frac{p'}{p_0} = \frac{16}{15}$$

Or, lorsque v_0 est si peu différent de v', il n'y a pas d'err sensible à prendre :

$$\text{log. hyp. } \frac{v_0}{v'} = \frac{v_0 - v'}{v'}$$

On a ainsi une valeur suffisamment exacte de T sou forme très-simple que je lui ai donnée dans mon *Aide-moire des ingénieurs* :

$$T = p_0 v_0 \left(\frac{v_0 - v'}{v'}\right) = p' \,(v_0 - v') \text{ kilogrammètres.}$$

76. *Applications numériques.*—Supposons donc qu'il gisse de fournir à un fourneau un mètre cube d'air pa conde, ce mètre cube étant mesuré sous la pression at sphérique $p_0 = 10330$ kilog. par mètre carré, et de le denser préalablement aux $\frac{15}{16}$ de son volume primitif aura :

$$\frac{v_0}{v^1} = \frac{p'}{p_0} = \frac{16}{15}, \text{ et log. } \frac{v_0}{v'} = 0.028$$

Ainsi, abstraction faite des frottements et de toutes les autres résistances étrangères à l'*effet utile*, il faudra que la machine motrice dépense sur la tige du piston, dans chaque seconde, un travail :

$$T = p_0 v_0 \times 2.3026 \log. \frac{v_0}{v'} = 10330 \times 2.3026 \times 0.028$$

$$T = 23785.86 \times 0.028 = 666 \text{ kilogrammètres par seconde.}$$

Ajoutant le tiers et divisant par 100, ce qui revient à diviser par 75, on a 8.88 pour le nombre de *chevaux* correspondant à ce travail par seconde.

On aurait trouvé $T = 688 + 2/3$ et dès lors un peu plus de neuf *chevaux* en employant la formule approximative (60).

77. *Ecoulement de l'air; vitesse* u *de sortie à la buse.* — Nous prendrons la question d'une manière générale, et le cas particulier des machines soufflantes s'y trouvera compris. R est un réservoir dans lequel on suppose que l'air est entretenu à une pression constante $= p'$ par mètre carré, a est la section de l'orifice par lequel il s'écoule, et $p < p'$ la pression par mètre carré qui a lieu dans la tranche extérieure immédiatement contiguë à l'orifice a. On suppose que la température est zéro, tant à l'intérieur qu'à l'extérieur du réservoir. Soit alors de l'épaisseur infiniment petite de la tranche d'air qui franchit l'orifice a dans un instant dt; $a\,de$ sera le volume de cette tranche et si Π' est le poids du mètre cube d'air sous la pression p' du réservoir R, $\Pi' a\,de$ sera le poids de la petite tranche. En divisant ce poids par g, on aura l'expression de sa masse (page 42); de sorte qu'en multipliant cette masse par le carré u^2 de la vitesse inconnue avec laquelle elle franchit l'orifice, on a :

$$\frac{\Pi' a\,de}{g} u^2 \qquad (61)$$

pour la *force vive* de la tranche à sa sortie.

D'une autre part, de est encore le petit chemin que sa

section génératrice a a parcouru dans le même tems dt, dans la direction propre de la force mouvante $(p'-p)$ on a donc $(p'-p)\ a\,d\,e$ pour le travail de cette force. Eg lant la demi-force vive acquise par la tranche au travail la force mouvante, on a, pour déterminer la vitesse u à sortie perpendiculairement à la section de l'orifice :

$$u^2 = 2\,g\,\frac{(p'-p)}{\Pi'}, \text{ ou } u = \sqrt{\frac{2\,g\,(p'-p)}{\Pi'}} \quad ($$

Pour déterminer Π', on peut remarquer que lorsque l' a condensé à un volume quelconque v' un volume prim v_0 pris à la pression atmosphérique $p_0 = 10330$ kilog., n'a pas pour cela changé le poids total; or, à la pression le poids Π_0 du mètre cube d'air à la température zéro 1 kilog. 293, donc si Π' est le poids du mètre cube d'air s la pression p' correspondante au volume v', on doit avoi

$$\Pi' v' = \Pi_0\, v_0, \text{ d'où } \Pi' = \Pi_0 \frac{v_0}{v'} = 1.293\, \frac{v_0}{v'} = 1.293 -$$

$$\Pi' = \frac{\Pi_0}{p_0}\, p' = \frac{1.293}{10330}\, p' = \frac{p'}{7989.17}$$

p' étant toujours connu, on obtiendra donc facilement Cependant, ces données ne suffiraient pas encore pour av la vitesse u dont l'expression contient la pression mètre carré p qui a lieu dans la veine fluide à sa sortie mê de l'orifice. Or, cette pression est inconnue, et il serait mê difficile de la mesurer directement, car le *manomètre* l'on plongerait dans la veine à une petite distance en a de l'orifice changerait les circonstances de l'écoulement altèrerait ainsi la tension p que l'on voudrait mesurer étant nécessairement compris entre p' et p_0 et ces deux d nières pressions étant par hypothèse peu différentes l'une l'autre, la différence entre p et p_0 sera, *à fortiori*, as *faible* pour pouvoir être négligée dans les approximations *la pratique*. En substituant ainsi à p la pression atmos

rique p_0, on aura une valeur exagérée de la vitesse de sortie, savoir :

$$u = \sqrt{2g\,\frac{(p' - p_0)}{\Pi'}} \qquad (64)$$

laquelle ne pourra être employée que dans les cas où p' différera peu de p_0.

78. *Volume* Q *et poids d'air* P *écoulés en une seconde.* — On pourrait croire qu'en multipliant la section a de l'orifice par la vitesse u que nous venons de déterminer, on obtiendrait le volume Q écoulé en une seconde, et par suite le poids $P = \Pi' Q$ de ce volume. Mais outre l'incertitude qui affecte déjà l'expression u, il en est une autre qui affecte l'orifice de sortie, lequel n'est point en réalité la section a de la buse. Quelques expériences montrent en effet que le véritable orifice de sortie est plus petit que cette section a et situé à une courte distance en aval de celle-ci, distance un peu variable avec la forme des orifices et où la veine fluide *se contracte*. m étant le *coefficient de contraction*, on aura donc en général :

$$Q = m\,a\,u, \text{ et } P = \Pi' m\,a\,u \qquad (65)$$

et, en moyenne, on pourra faire $m = 0.65$ pour un orifice circulaire percé dans une paroi *mince*; — $m = 0.93$, si l'orifice est muni d'un ajutage court et cylindrique, — et $m = 0.94$, si l'ajutage est court et légèrement conique.

79. *Vitesse* U *de l'air entrant de l'atmosphère dans le vide.* — On obtiendra évidemment cette vitesse en faisant $p' = p_0 = 10330$ kil., $\Pi' = \Pi_0 = 1^{k}.293$, et enfin $p = 0$ dans la formule (62), et l'on aura ainsi :

$$U = \sqrt{\frac{2gp_0}{\Pi_0}} = \sqrt{\frac{19.62 \times 10330}{1.293}} = \sqrt{19.62 \times 7989.17}$$

$$U = \sqrt{156747.52} = 395^{m}.91 \qquad (66)$$

Ainsi, un boulet qui, se mouvant dans l'air, y serait animé

d'une vitesse de 400 mètres par seconde, ferait le vide derrière lui, aussi longtemps qu'il conserverait cette vitesse (*). Il aurait donc, indépendamment d'autres résistances que nous n'étudierons pas ici, à vaincre le poids total de l'atmosphère. La résistance R qu'il éprouverait ainsi serait donc exprimée par :

$$R = \frac{1}{4}\pi\, D^2 p_0 = 0.785\, D^2 p_0 \qquad (67)$$

D étant son diamètre et $\pi = 3.1415$. Pour le boulet de 12 kilog. (dit de 24) dont le diamètre $D = 0^m.148$, cette résistance s'élèverait au moins à 117 kilogrammes; d'après *Hutton*, elle est encore plus considérable, et atteint 170 kilogrammes à cette même vitesse de 400 mètres par seconde.

80. *Descente sur le plan incliné.* — Nous savons, par le théorème de *Stevin* (41), que lorsqu'un grave descend librement la pente d'un plan incliné, la force mouvante F, qui agit sur lui à chaque instant parallèlement à la longueur L du plan, est au poids P de ce corps comme la hauteur H du plan est à sa longueur L. On a donc :

$$\frac{F}{P} = \frac{H}{L}, \text{ ou } FL = PH \text{ kilogrammètres.} \qquad (68)$$

C'est-à-dire que, *pour élever un poids* P *au sommet d'un plan incliné, le travail* (8) *à dépenser sera toujours le même et* $= PH$, *soit qu'on élève le corps verticalement soit qu'on le traîne le long de la pente* L. Il est bien entendu que l'on fait, ici et dans ce qui va suivre, abstraction complète du *frottement* du corps sur le plan, et que l'on suppose en outre que le corps ne *roule* pas. Il est donc considéré comme glissant sans frottement parallèlement à

(*) J'ai montré, dans mes leçons au Conservatoire de 1853, que les expériences faites à l'aide du *pendule balistique* en vue de déterminer les *vitesses* initiales des boulets, conduiront à des évaluations sensiblement exagérées de ces vitesses, aussi longtemps que l'artillerie négligera de tenir compte de l'effet produit par la brusque rentrée de l'air dans la cavité du pendule, et j'y ai donné la mesure de cet effet.

pente. Dans cette hypothèse, et désignant par α l'inclinaison sur l'horizon de la longueur L du plan, on a :

$$H = L \sin. \alpha, \text{ d'où } \sin. \alpha = \frac{H}{L} = \frac{F}{P} \qquad (69)$$

81. Ainsi, et sans plus de recherches, on obtiendra immédiatement toutes les formules relatives au cas de la descente d'un grave sur un plan incliné connu par sa hauteur H et son hypothénuse L, en remplaçant simplement le quotient $\frac{F}{P}$ des formules de la page 47 par le quotient $\frac{H}{L}$ qui lui est égal, ou encore par le sinus de l'inclinaison α du plan.

e y exprimera alors la partie de la longueur totale L du plan qui aura été parcourue par le mobile au bout du nombre t de secondes ; v est la vitesse parallèle au plan acquise à ce même instant. On aura donc entre autres relations :

$$\left.\begin{aligned}
e &= \frac{1}{2} g \sin. \alpha . t^2 = \frac{v^2}{2g \sin. \alpha} = \frac{1}{2} vt \\
v &= g \sin. \alpha . t = \sqrt{2ge \sin. \alpha} = \frac{2e}{t} \\
t &= \frac{v}{g \sin. \alpha} = \sqrt{\frac{2e}{g \sin. \alpha}} = \frac{2e}{v} \\
\varphi &= g \sin. \alpha = \frac{v}{t} = \frac{2e}{t^2} = \frac{v^2}{2e} \\
\frac{F}{P} &= \frac{H}{L} = \sin. \alpha = \frac{2e}{gt^2} = \frac{v^2}{2ge} = \frac{v}{gt}
\end{aligned}\right\} \qquad (70)$$

Si nous désignons ici par h la partie de la hauteur totale H du plan qui correspond à la partie e de sa longueur totale L connue, on aura toujours à cause de la similitude :

$$\frac{h}{e} = \frac{H}{L} = \sin. \alpha = \frac{F}{P}$$

[redacted]

On voit *qu'un corps qui, sans rouler ni frotter, a parcour sans vitesse initiale une longueur* e *du plan, a acquis pa rallèlement à ce plan la même vitesse* v *que s'il était tomb de la hauteur* h *correspondante à* e.

En effet, e sin. $\alpha = h$, donne :

$$v = \sqrt{2ge \sin. \alpha} = \sqrt{2gh}$$

Il résulte de cette propriété que *les vitesses* v v' v'' *ac quises par des corps qui ont descendu des plans inclinés d même hauteur* h, *mais de longueurs différentes* l l' l'', *soi toutes égales entre elles* et qu'elles ne diffèrent que par leu directions.

CHAPITRE VI.

Composition et décomposition du Mouvement et des Forces.

82. *Lemme.* — Imaginons (fig. 13) qu'un point matéri dont le poids est p et la masse est $m = \frac{p}{g}$ soit enfilé pa une tige rigide A Y et se meuve sur cette tige avec une vites uniforme v_2.

Supposons encore que pendant la durée t du mouvemen de m le long de sa tige, l'extrémité A de celle-ci parcourr la droite A X avec une autre vitesse uniforme v_1, sous l condition que l'angle α de la tige et du chemin décrit par so extrémité A soit invariable pendant la durée t du mouvement

Je dis que le point mobile m, décrira effectivement dan ce temps t le troisième côté e du triangle formé sur le directions et les longueurs y et x des chemins respective ment et simultanément parcourus sur la tige et par l tige.

On pourrait, ce nous semble, considérer ce *fait* comm *parfaitement* évident, et les longues et abstruses démonstr

tions qui en ont été données comme inutiles. Cependant, si quelque éclaircissement pouvait paraître nécessaire, nous hasarderions le suivant :

y et x étant pris pour représenter les distances parcourues depuis l'origine A du mouvement au bout d'un temps quelconque t avec les vitesses constantes v_2 et v_1, on a immédiatement les relations :

$$y = v_2 t, \text{ et } x = v_1 t \tag{71}$$

Tirant de l'une et l'autre relation la valeur de la durée t du mouvement et égalant ces valeurs entre elles, on obtient l'équation :

$$y = \frac{v_2}{v_1} x \tag{72}$$

de la *trajectoire* du point mobile m, équation qui est non-seulement celle d'une *droite*, puisque le quotient $\frac{v_2}{v_1}$ est ici constant, mais encore celle de la droite e troisième côté du triangle formé sur les directions et les grandeurs des chemins x et y respectivement parcourus.

83. On construirait évidemment cette équation en traçant deux droites, XR et YR, parallèles et proportionnelles aux vitesses v_2 et v_1, et le troisième côté e = AE du triangle formé sur les chemins respectifs x = AA', y = A'E serait visiblement le *lieu* de cette équation, ou la série continue des points que le mobile m aura successivement occupés dans le temps t, ou enfin la droite qu'il a parcourue.

84. On a donc entre le chemin *résultant* e et les chemins *composants* x y, toutes les relations géométriques qui lient les angles α_1, α_2, $(180 - \alpha)$, et les côtés d'un triangle rectiligne.

Ainsi les chemins composants x et y étant donnés, ainsi que l'angle $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, compris entre eux, on obtiendrait la

grandeur e du chemin *résultant*, par la relation tr
trique bien connue :

$$e^2 = x^2 + y^2 + 2xy \cos. \alpha$$

et quant aux *directions* de ce chemin résultant e, pa
à celles des chemins composants x et y, elles serai
nées par la proportionnalité entre les côtés du trian
sinus des angles qui leur sont opposés, soit :

$$\text{Sin. } \alpha_1 = \frac{y}{e} \text{ sin. } \alpha, \text{ et sin. } \alpha_2 = \frac{x}{e} \text{ sin.}$$

Mais dans tout triangle, et même dans tout polygo
ou gauche, un côté quelconque e est la somme algé
tous les autres côtés xy, multipliés chacun par le co
l'angle intérieur au polygone qu'il forme avec e. O
encore :

$$e = x \cos. \alpha_1 + y \cos. \alpha_2$$

en observant que les cosinus des angles obtus dev
pris négativement ; c'est-à-dire que le *chemin résult*
encore égal à la somme algébrique des projections
mins composants sur sa direction propre.

85. *Lorsque les directions des chemins composa*
sont rectangulaires entre elles, $\alpha = 90°$ donnant cos.
sin. $\alpha = 1$, les formules ci-dessus se simplifient et dev

$$e^2 = x^2 + y^2$$

$$e = x \cos. \alpha_1 + y \sin. \alpha_1$$

$$\text{Sin. } \alpha_1 = \frac{y}{e}; \text{ sin. } \alpha_2 = \cos. \alpha_1 = \frac{x}{e}$$

$$\text{d'où } \frac{\sin. \alpha_1}{\cos. \alpha_1} = \text{tang. } \alpha_1 = \frac{y}{x}$$

$$\text{et enfin, } x = e \cos. \alpha_1, \text{ et } y = e \sin. \alpha_1$$

Les premières formules donneront pour ce cas p
et fréquent la *grandeur* du chemin résultant e, et les
feront connaître sa direction.

86. On voit encore que, en général, *le chemin résultant* e *est en grandeur et en direction la diagonale du parallélogramme construit sur les grandeurs et les directions des chemins composants*, et c'est habituellement sous cette forme qu'on énonce la loi qui régit une résultante et ses deux composantes.

87. *Composition des vitesses.* — Divisant par la durée t du mouvement tous les termes de l'équation (75), désignant par v la vitesse $\frac{e}{t}$ du point mobile dans la direction du chemin résultant e, remarquant que $\frac{x}{t}$ et $\frac{y}{t}$ sont les vitesses constantes v_1, v_2 en vertu desquelles ce point mobile progresse dans les directions x y, on voit que *les vitesses simultanées et constantes suivent la règle du parallélogramme, comme les chemins uniformément parcourus dans la direction de ces vitesses*, et que l'on a encore en général :

$$\left.\begin{aligned} v &= v_1 \cos.\alpha_1 + v_2 \cos.\alpha_2 \\ v^2 &= v_1^2 + v_2^2 + 2 v_1 v_2 \cos.\alpha \\ \text{Sin.}\,\alpha_1 &= \frac{v^2}{v}\sin.\alpha ; \ \sin.\alpha_2 = \frac{v_1}{v}\sin.\alpha \\ v_1 \sin.\alpha_1 &= v_2 \sin.\alpha_2 \end{aligned}\right\} (77)$$

formules qui, pour le cas où les directions des vitesses v_1 v_2 sont rectangulaires entre elles, deviennent :

$$\left.\begin{aligned} v^2 &= v_1^2 + v_2^2 \\ v &= v_1 \cos.\alpha_1 + v_2 \sin.\alpha_1 \\ \text{Sin.}\,\alpha_1 &= \frac{v_2}{v} ; \ \sin.\alpha_2 = \cos.\alpha_1 = \frac{v_1}{v} \\ \text{tang.}\,\alpha_1 &= \frac{v_2}{v_1} \end{aligned}\right\} (78)$$

88. *Cas des mouvements variables.* — Nous avons supposé, dans ce qui précède, que la masse m se mouvait sur la tige A Y d'un mouvement *uniforme*, ou avec une vitesse constante v_2, *tandis que l'extrémité* A de cette tige parcourait la droite

A X avec une autre vitesse constante v_1. — Supposons m tenant que l'une de ces vitesses v_2, ou même toutes de v_2, varient avec le temps t, écoulé depuis l'origine A des m vements, ou avec les distances déjà parcourues par le m m, parallèlement aux axes fixes A X, A Y, et que nous gnerons encore par x et y. Il est évident qu'alors, le ch résultant ne sera plus, *en général*, le troisième côté triangle rectiligne, formé sur les grandeurs et les direc des chemins x et y, parcourus par le mobile depuis l'or du mouvement, et l'équation (72) montre que cette *règ parallélogramme* n'aurait lieu, quant aux chemins e, que dans le cas exceptionnel où les vitesses, quoique varia conserveraient cependant entre elles un rapport constant. ce dernier cas, en effet, la trajectoire du point m serait encore une droite, mais la longueur e de cette droite di par le temps écoulé t n'exprimerait plus une vitesse r tante, puisque le mobile change de vitesse en chacu points de cette trajectoire.

Soient donc en général u_1 et u_2, les vitesses que po le point mobile, lorsqu'il est parvenu en m, t secondes : être parti de l'origine, et parallèlement aux axes fixes A AY. Ces vitesses pouvant être considérées comme consta pendant un instant dt, on a, pour cet instant du moins

$$dx = u_1 dt,\ dy = u_2 dt$$

d'où, en éliminant dt :

$$dy = \frac{u_2}{u_1} dx$$

ce qui est l'équation d'une droite infiniment petite de, gonale d'un parallélogramme construit sur les directio les grandeurs infiniment petites dx, dy, puisque u_1 e *sont constants* chacun, du moins pendant l'instant dt.

89. En introduisant dans l'équation ci-dessus, les va de u_1 u_2, données en fonction des chemins déjà parc

, au bout du temps t et intégrant (Règle 33), on aurait ation de la trajectoire du mobile m, laquelle, dans le les vitesses variables, sera, en général, un polygone d'une ité de côtés infiniments petits, tels que de, c'est-à-dire *courbe*. Nous en donnerons tout à l'heure un exemple. marquons seulement ici que *la loi du parallélogramme plique dans toute sa généralité aux mouvements infinit petits*, tandis qu'elle n'a lieu en toute rigueur pour les vements finis, que dans les cas exceptionnels où les vis v_1 et v_2 sont constantes. On a donc à chacun des ints dt d'un mouvement quelconque, pour lequel les ches composants dx, dy, sont inclinés l'un à l'autre d'un le donné α:

$$\left.\begin{array}{l} de^2 = dx^2 + dy^2 + 2\,dx\,dy\cos.\alpha \;(^*) \\ de = dx\cos.\alpha_1 + dy\cos.\alpha_2 \\ \sin.\alpha_1 = \dfrac{dy}{de}\sin.\alpha;\ \sin.\alpha_2 = \dfrac{dx}{de}\sin.\alpha \end{array}\right\}\ (81)$$

nules qui donneraient la grandeur de la résultante de, et sinus de son inclinaison sur les chemins composants dy, , et qui, dans le cas où ces petits chemins sont rectangum entre eux, prendraient les formes plus simples

$$\left.\begin{array}{c} de^2 = dx^2 + dy^2 \\ de = dx\cos.\alpha_1 + dy\sin.\alpha_1 \\ \sin.\alpha_1 = \dfrac{dy}{de}\ ;\ \sin.\alpha_2 = \cos.\alpha_1 = \dfrac{dx}{de} \\ \text{tang}.\alpha_1 = \dfrac{dy}{dx} \end{array}\right\}\ (82)$$

90. *La loi du parallélogramme régit les vitesses simultanées* *d ce point mobile* m *est animé à un instant quelconque mouvement.* — Il suffit, pour s'en convaincre, de diviser

(*) On écrit, en vue de simplifier, de^2, dx^2, dy^2 au lieu de $(de)^2$, $(dx)^2$, $(dy)^2$, *mais ces* quantités représentent en réalité les carrés *de, dx, dy.*

par la durée dt de cet instant, tous les termes de la 2
tion (81), et de remarquer que $\frac{de}{dt}$, $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sont
tivement (1) les *vitesses* instantanées u, u_1, u_2 dans le
tions du chemin résultant et des chemins composants
tanés. Ainsi, l'on a :

$$u = u_1 \cos. \alpha_1 + u_2 \cos. \alpha_2$$

et toutes les autres relations que comporte le triang
niment petit mEZ.

91. Supposons maintenant que, sans changer de dir
les vitesses finies u, u_1 u_2 soient décomposées en un
égal d'éléments du, du_1 du_2, et il doit paraître évide
y aura entre ces éléments, les mêmes relations qu'e
vitesses semblable set finies u, u_1 u_2, *les accroissemen
vitesse se composent donc suivant la loi du parallélogr*
comme les chemins et les vitesses; résultat que la d
tiation de l'équation précédente eût suffisamment dém
puisque α_1 et α_2 étant supposés constants, elle cond
relation

$$du = du_1 \cos. \alpha_1 + du_2 \cos. \alpha_2$$

92. Mais, si l'on multiplie par la masse m du point
chacun des termes de cette dernière équation, on s'a
que *la loi du parallélogramme s'applique encore au
tités de mouvements élémentaires* m d u, m d u$_1$, m d u
même masse m, et par conséquent aux *impulsions élém*
Fdt, F$_1dt$, F$_2dt$ des forces F, F$_1$ F$_2$, impulsions num
ment égales, et de même direction que les quantités
vements mdu, mdu_1 mdu_2,

93. Divisant maintenant par dt tous les termes de
tion :

$$mdu = mdu_1 \cos. \alpha_1 + mdu_2 \cos. \alpha_2$$

et changeant tous les signes, on reconnaîtra que la

parallélogramme régit encore les forces d'inertie —

-, $-m\frac{du_2}{dt}$ *d'une même masse* m, et qu'il en
irement de même des *forces mouvantes* F, F_1, F_2
nent égales et contraires à ces forces d'inertie,
les *accélérations* $\frac{du}{dt}=\varphi$, $\frac{du_1}{dt}=\varphi_1$, $\frac{du_2}{dt}=\varphi_2$.
mé.—Ainsi se composent, suivant *la loi du parallé-*
, deux quelconques des quantités mécaniques dési-
les noms de *chemins rectilignes* x y, *simultané-*
ts chacun d'un mouvement uniforme,—les chemins
es simultanés d x d y, — *les vitesses simultanées*
ne même masse *m*, *ses accroissements de vitesse*
et par conséquent ses *quantités de mouvement, soit*
m u_2, soit *élémentaires* $m\,du_1$, $m\,du_2$, — les *accé-*
— les *impulsions*, — les *forces d'inertie* et par con-
s *forces mouvantes* ou *pressions* F_1 F_2; mais il est
oir, et nous montrerons tout à l'heure qu'il n'en
si des quantités *travail* et *force vive.*
importante du parallélogramme, qui n'a été démon-
evin, que pour le cas des directions rectangulaires,
tefois avoir été connue des anciens. C'est ce qui
ulter, du moins, de ce passage des *Questions mé-*
d'Aristote qui vivait, comme l'on sait, 350 ans
s-Christ :
stum igitur quòd id quod secundum diametrum
us fertur lationibus, necessario secundum laterum
onem fertur. »
nposition des mouvements simultanés.—Puisqu'un
riel *m* (fig. 13) qui, dans le temps dt, parcourt à
ux chemins rectilignes élémentaires dx dy in-
à l'autre d'un angle constant α décrit en effet et
me temps dt, la diagonale de du parallélogramme
ur les grandeurs et les directions de dx et dy, on
roquement admettre qu'un point matériel *m* qui
ffet un petit chemin rectiligne d e, au lieu de dé-

crire ce chemin de, se meut simultanément suivant de autres chemins $dx\ dy$ limités et dirigés de telle sorte qu soient les côtés d'un parallélogramme *quelconque* dont est la diagonale conduite de leur point d'intersection.

On pourra donc toujours substituer à un chemin réel ment décrit de, deux autres chemins $dx\ dy$ respectivem inclinés à de d'angles donnés $\alpha_1\ \alpha_2$; et l'on *décomposera* u un chemin élémentaire quelconque de en deux chemins é mentaires donnés par les conditions

$$dy = \frac{de \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)} \text{ et } dx = \frac{de \sin. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Mais il doit paraître évident, après les développem que nous avons donnés ci-dessus, que ce même mod décomposition s'appliquera à toutes les quantités mécani que nous avons énumérées au résumé (94). Donc si nous re sentons en général par R l'une quelconque de ces quant considérées comme résultante et par X Y ses composants même nature, α_1 et α_2 continuant à désigner leurs incli sons respectives et données sur la direction de R, on tr verait de même pour les valeurs de ces composantes :

$$X = \frac{R \sin. \alpha_2}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}, \text{ et } Y = \frac{R \sin. \alpha_1}{\sin. (\alpha_1 + \alpha_2)}$$
$$\text{d'ou } X \sin. \alpha_1 = Y \sin. \alpha_2$$

Ainsi, nous sommes maintenant en mesure de comp et de décomposer toutes les quantités mécaniques énumé au résumé (94).

96. Il est vrai que nous avons supposé jusqu'ici deux com santes seulement X Y donnant lieu à une résultante R; r l'analogie conduit directement à la solution des cas (fig. où l'on aurait trois, quatre ou même un nombre quelcon de composantes X Y T.... S.... appliquées au même po Ainsi on pourrait, par exemple, composer d'abord X en une résultante R_2 ce qui revient, ainsi que nous l'av

vu, à chercher soit par un tracé, soit mieux encore par le calcul, le troisième côté R d'un triangle formé sur les grandeurs et les directions des quantités XY. On combinerait ensuite R avec T qui donneraient de même une seconde résultante R_1 et enfin combinant R_1 avec S, on obtiendrait en grandeur et en direction la résultante totale R_2 de X, Y, T, S.

Et l'on voit facilement que *cette résultante totale est la somme algébrique des projections de toutes les composantes sur sa direction.*

97. *Condition de l'équilibre.*— Il est évident d'ailleurs que l'équilibre naîtrait dans ce système, si l'on opposait une force N égale et directement contraire à la résultante totale. Cet équilibre aurait lieu de lui-même si cette résultante totale était nulle.

Dans le cas particulier où trois forces N, X, Y sont en équilibre sur un même point O (fig. 15), on trouve facilement que les intensités de chacune de ces forces doivent être entre elles comme le sinus de l'angle formé par les directions des deux autres, d'où :

$$\frac{N}{\sin.\ \alpha} = \frac{Y}{\sin.\ \alpha_1} = \frac{X}{\sin.\ \alpha_2}$$

Remarque. — On peut observer que si, à partir du point d'application O, on porte sur les directions de ces forces les lignes OY, OX, ON qui les représentent, le point O est le *centre des moyennes distances* du triangle NYX, point qui jouit de cette propriété que la somme des carrés de ses distances aux sommets est minimum.

98. *Autre méthode de composition.* — Le mode suivant de composition des forces, des vitesses, etc. (94), se prête plus facilement au calcul, il est connu sous le nom de méthode des *coordonnées rectangulaires* (fig. 16).

Soient F_1 F_2 F_3... tant de forces que l'on voudra, toutes situées dans un même plan, appliquées à un même point matériel M et représentées, en grandeur, direction et sens,

par les droites MF_1, MF_2, MF_3; menez par le point M droites perpendiculaires entre elles Mx_1, My_3, mais diri d'ailleurs, d'une manière quelconque. Des extrémités F F_3 de chacune des forces, abaissez, sur les coordonnées My_2 les perpendiculaires

$$F_1x_1,\ F_1y_1;\ F_2x_2,\ F_2y_2;\ F_3x_3,\ F_3y_3\ldots$$

Par un point O quelconque du plan des forces, m deux axes OX, OY, respectivement parallèles à Mx_1, l portez *bout à bout*, sur ces axes, les longueurs.:

$$\begin{aligned} O x_1 &= Mx_1,\ x_1x_2 = Mx_2;\ x_2x_3 = Mx_3\ldots \\ O y_1 &= My_1,\ y_1y_2 = My_2;\ y_2y_3 = My_3\ldots \end{aligned}$$

en observant le sens des composantes et remarquant s'il existait dans le système une force dirigée comme elle fournirait des composantes Mx_4, My_4, qui devi être portées de x_3 en x_4 et de y_3 en y_4, en sens inver premières; nous ferons ici abstraction de cette der force.

Complétant le parallélogramme Ox_3y_3R, on aurait en grandeur, direction et sens, pour la résultante des f MF_1, MF_2, MF_3, appliquées au point matériel M, su transporté en O.

Il est évident que l'on produirait l'équilibre dans le syst si l'on substituait à OR une force égale et directement traire OS, qui passerait dès lors dans l'angle X_1OY_1.

Si l'on décomposait, à son tour, cette force OS su OX_1 et OY_1, sa composante, suivant OX_1, serait visible égale et de signe contraire à la somme des composante forces suivant OX. et sa composante suivant OY_1, ég de signe contraire à la somme des composantes de F F_3, suivant OY.

On peut conclure de là que l'équilibre ne peut exist lui-même entre toutes les forces appliquées à un point tériel dans un même plan, qu'autant que la somme alg

que des composantes, suivant chacun des axes, est nulle d'elle-même.

99. *Solution par le calcul.* On substitue facilement le calcul à ce procédé graphique. Soient, en effet (fig. 16), a_1, a_2, a_3... les angles formés par les forces MF_1, MF_2, MF_3 avec l'axe horizontal OX, α l'angle de la résultante R avec le même axe, on a

$$Mx_1 = Ox_1 = F_1 \cos. a_1; \ My_1 = Oy_1 = F_1 \sin. a_1$$
$$Mx_2 = x_1x_2 = F_2 \cos. a_2; \ My_2 = y_1y_2 = F_2 \sin. a_2$$

et ainsi de suite, d'où

$$\left.\begin{array}{c} F_1 \cos. a_1 + F_2 \cos. a_2 + F_3 \cos. a_3 + \ldots\ldots = R \cos. \alpha = X \\ F_1 \sin. a_1 + F_2 \sin. a_2 + F_3 \sin. a_3 + \ldots\ldots = R \sin. \alpha = Y \\ R = \sqrt{X^2 + Y^2} \\ \cos. \alpha = \frac{X}{R}; \ \sin. \alpha = \frac{Y}{R}; \ \text{tang.}\, \alpha = \frac{Y}{X} \end{array}\right\} \quad (89)$$

Observons que les cosinus et les sinus doivent être positifs quand les forces tendent à augmenter les coordonnées positives, et qu'ils sont négatifs dans le cas contraire. Les forces F_1, F_2, F_3, sont toujours positives.

La valeur de R montre encore ici que l'équilibre ne peut avoir lieu dans le système, ou, en d'autres termes, que la résultante du système ne peut être nulle qu'autant que l'on a à la fois

$$X = o \text{ et } Y = o \qquad (90)$$

l'équilibre n'aurait donc pas lieu si une seule de ces équations était satisfaite ; la résultante serait alors parallèle à l'un des axes. Ainsi :

$$X = R \cos. \alpha = o, \qquad (91)$$

R n'étant pas nulle, suppose $\cos. \alpha = o$, ou $\alpha = 90°$; c'est-à-dire que la résultante serait parallèle à l'axe des Y, ou perpendiculaire à l'axe des X.

$Y = R \sin. \alpha = o$ suppose $\alpha = o$ ou $180°$ et la résult parallèle à l'axe des X ou perpendiculaire à celui des Y

100. Je crois utile de donner ici une application numéı de ces formules, dont on ne saisit pas toujours bien le sen remarquant que la table des SINUS dispense de l'emploi logarithmes et abrège beaucoup ces calculs.

Applications numériques. Soient F_1, F_2, F_3,.. respec ment égales à 20, 25 et 30 kilogrammes;

Les angles $F_3 M F_2 = 30°$; $F_2 M F_1 = 28°$, et F_1 M angle de F_1 avec l'axe des abscisses $= 20°$;

On aura pour les angles respectifs formés par la dire des forces avec l'axe des X :

pour F_1, $a_1 = 20°$; pour F_2, $a_2 = 48°$; pour F_3, a_3 = d'où

$$X = R \cos. \alpha = 30 \times 0.2079117 + 25 \times 0.6691\ldots + 20 \times 0.9396926$$

$$Y = R \sin. \alpha = 30 \times 0.9781476 + 25 \times 0.7431\ldots + 20 \times 0.3420201$$

$$X = R \cos. \alpha = 41^k.759468, \quad Y = R \sin. \alpha = 54^k.76\ldots$$

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2} = 68^k.86857$$

C'est la *grandeur* de la résultante; pour obtenir sa *tion*, on a :

$$\text{tang.}\ \alpha = \frac{Y}{X} = 1.31140203$$

C'est la tangente de l'angle formé par la direction de sultante avec l'axe des X. Ce nombre répond à un an $52° 40' {}^{30}/_{79}$. En retranchant $48°$, il reste $4° 40' {}^{30}/_{79}$ l'angle formé par la résultante avec la direction de dessus de cette dernière force.

101. Lorsque la direction de la résultante est connue, *obtient la* grandeur, sans extraction de racine, par la *tion :*

$$R = \frac{Y}{\sin.\ \alpha} = 68^{kil}.86857$$

Les calculs sont un peu moins longs lorsque la direction le l'axe des X se confond avec celle de l'une des forces, avec MF_1, par exemple. Les données numériques restant comme ci-dessus, on trouverait :

Pr la somme Y des composantes suivant OX, $X = 57^k.971269$;
Pour celle Y des composantes suivant OY, $Y = 37^k.178233$;

d'où $$\frac{Y}{X} = 0.6413332 = \text{tang. } 32° 40' {}^{30}/_{79}$$

et $$\frac{Y}{\sin.\ 32° 40' {}^{30}/_{79}} = R = 68^{kil}.86857$$

On remarque que, lorsque des forces situées dans un même plan sont en équilibre, leurs projections sur un même plan quelconque forment un système en équilibre.

102. *Travail d'une force dont le point d'application ne se meut pas dans la direction de cette force* (fig. 17).—Nous avons (d'après M. Poncelet) appelé *travail* d'une force le produit de l'intensité de cette force par le chemin que décrit son point d'application *dans la direction propre* de cette force. Supposons maintenant pour exemple qu'une résistance quelconque Q s'oppose au mouvement de la pièce M assujettie à glisser dans une rainure MN; une force F dont la direction est oblique à la rainure entraîne la pièce M et lui fait parcourir un chemin e parallèle à la rainure dans un temps quelconque t, on demande le travail T de la force oblique F pendant ce temps.

Désignant par α l'angle de la direction de la force F avec le chemin e réellement décrit par son point d'application, et décomposant ce chemin e en deux composantes x et y, dirigées l'une x suivant F, l'autre y perpendiculaire à la direction de cette force, nous aurons, d'après la définition même du travail d'une force :

$$x = e \cos.\ \alpha, \text{ d'où } T = Fx = e \cos.\ \alpha\ .\ F = eF \cos.\ \alpha \quad (92)$$

et il doit paraître évident que le chemin $y = e$ sin. α ne donnera lieu à aucun *travail*, puisque ce chemin y ne pourrait fournir aucune composante *dans la direction propre* de la force F.

103. On voit donc que *le travail* T *d'une force* F *oblique au chemin* e *que décrit son point d'application est le produit de cette force par ce chemin et par le cosinus de l'angle compris entre leurs directions.*

On voit de plus que pour obtenir la valeur de ce travail, il est indifférent de projeter le chemin e sur la direction de la force F ou au contraire de projeter la force F sur la direction du chemin e, puisque $e \cos. \alpha \times F = F \cos \alpha. \times e$; toutefois ce dernier mode est généralement préférable, parce qu'il met à nu la composante F' de la force F qui est perpendiculaire au chemin décrit, composante qui *ne travaille pas* selon la véritable acception du mot *travail* dans la mécanique, mais qui produit souvent, comme dans le cas actuel, une *pression*

$$F' = F \sin. \alpha \qquad (93)$$

contre des points, des lignes ou des surfaces fixes qu'il est souvent nécessaire d'évaluer.

104. *Application numérique.* — Soit $e = 3^m.50$, $F = 12$ kilogrammes, $\alpha = 20$ degrés et dès lors cos. $\alpha = 0.9396926$ et sin. $\alpha = 0.3420202$ (1).

On aurait donc pour le travail :

$$T = eF \cos. \alpha = 3.50 \times 12 \times 0.9397 = 39.46 \text{ kilogrammètres}$$

et pour la *pression* F', perpendiculaire à la rainure :

$$F' = F \sin. \alpha = 12 \times 0342 = 4.1 \text{ kilogrammes};$$

cette force F' donnerait lieu ici à un *frottement*, ou résistance d'une nature particulière que nous ne nous proposons pas d'étudier dans ce petit livre.

(1) On trouve, dans mon *Aide-mémoire des Ingénieurs*, une table des sinus, cosinus, tangentes en cotangentes, de minute en minute à sept décimales.

5. *Théorème. — Le travail de la résultante de deux forces appliquées à un même point est la somme algébrique des travaux partiels de ces forces sur ce point* (fig. 18). Quelle que puisse être la direction du chemin élémentaire *de* que le point M soit assujetti à décrire, décomposons la résultante en ses deux composantes X Y parallèlement et perpendiculairement à la direction MA de ce chemin *de*; les composantes perpendiculaires à MA ne travailleront pas, puisque le point d'application des forces ne donnera aucun chemin dans leurs directions propres; les composantes Mr, Ma', Mb' parallèles au chemin décrit par le point travailleront seules; on a:

$$Mr = Ma' - a'r = Ma' - Mb'$$

car les triangles égaux $Mb'b$, Rac donnent :

$$a'r = ac = Mb'$$

Ainsi $Mr.de$, $Ma'.de$, $Mb'.de$ sont évidemment les travaux élémentaires simultanés de la résultante R et de ses composantes X et Y; donc le travail de la résultante est la somme algébrique des travaux partiels de ses composantes.

Ainsi θ θ_1 θ_2 étant pris pour représenter les inclinaisons AMR, AMa, AMb de la résultante R et de ses composantes X et Y, on a:

$$R \cos. \theta . de = X \cos. \theta_1 \, de + Y \cos. \theta_2 . de \qquad (94)$$

CHAPITRE VII.

Rotations.

96. *Mouvement circulaire d'un point.* — Lorsqu'un point matériel p (fig. 19) tourne dans un seul et même plan perpendiculaire à un axe fixe A, en conservant toujours la même distance ρ à cet axe, on a coutume de rapporter son mouvement à celui d'un autre point géométrique n situé sur la même droite p, à un mètre de l'axe fixe A. Soit alors $d\alpha$ la fraction

ıfiniment petite de la circonférence $2\pi = 6^m.2831853$ que : point géométrique *n*, entraîné par le point matériel *p* tend décrire ou décrit en effet pendant l'un des instants égaux t infiniment petits dt, $d\alpha$ étant un arc assez petit pour pouoir être considéré comme confondu avec sa tangente,

$$\frac{d\alpha}{dt} = \omega = \text{vitesse angulaire.} \tag{95}$$

eprésentera en général la vitesse absolue du point géomérique *n* et en même temps ce que l'on nomme la vitesse *an-ulaire* du point matériel *p*. Les vitesses absolues de l'un t l'autre point étant évidemment entre elles comme les disances respectives de ces points à l'axe fixe, on a en désinant par V la vitesse du point matériel au moment où la itesse angulaire de la droite A *p* est ω :

$$\left.\begin{array}{c} V : \omega :: \rho : 1 \text{ mètre, d'où } V = \omega\rho = \rho\,\dfrac{d\alpha}{dt} \\ \text{et } \dfrac{V}{\rho} = \omega = \dfrac{d\alpha}{dt} \end{array}\right\} \tag{96}$$

107. La vitesse angulaire ω sera constante ou variable, elon qu'à des instants égaux et successifs dt corresponlront des petits chemins successifs $d\alpha$ égaux ou inégaux entre eux.

Si la vitesse angulaire ω est variable, et par exemple croissante de $d\omega$ pendant l'instant dt,

$$\frac{d\omega}{dt} \tag{97}$$

leviendra l'expression générale de l'*accélération angulaire* et

$$\rho\,\frac{d\omega}{dt} = \frac{dv}{dt} \tag{98}$$

sera l'*accélération* (§ 28) du point matériel.

L'accélération angulaire, nulle lorsque le mouvement an-

laire est uniforme, est constante lorsque ce mouvement t uniformément accéléré.

Exemples : — La terre accomplissant une révolution comte autour de son axe en 86164 secondes de temps moyen, us les points matériels qui en font partie sont animés d'une *tesse angulaire*

$$\omega = \frac{2\Pi}{86164^s} = 0^m.0000729\ldots$$

l'on sait que cette vitesse angulaire est parfaitement constante.

Si l'aiguille des heures d'une pendule se mouvait d'un mouvement uniforme, sa vitesse angulaire serait donc à très-eu près le *double* de celle de la terre.

On donne aux meules des moulins à blé une vitesse angulaire ω d'autant plus grande que leur rayon extérieur R est lus petit, et habituellement on fait $\omega = \frac{6}{R}$.

Lorsqu'une roue de voiture roule, sans glisser, sur un lan, la vitesse de translation u de son essieu est le produit le son rayon R par la vitesse angulaire ω de la roue autour le ce même essieu, et on a $u = \omega R$.

108. *Force vive d'un corps tournant autour d'un axe fixe.* — Nous avons appelé force vive d'un point matériel, dont le poids est p, le produit de la masse $m = \frac{p}{g}$ de ce point par le carré v^2 de sa vitesse v. Lorsque tous les points d'un corps se meuvent d'un mouvement parallèle, la force vive du corps est évidemment le produit du carré de leur vitesse commune par la somme de toutes les masses, ou par la masse totale du corps, de sorte que si P est le poids total de ce corps et v la vitesse dont il est actuellement animé, sa masse

$$\frac{P}{g} v^2 = M v^2$$

est encore l'expression de sa force vive.

Mais lorsqu'un corps est assujetti à tourner autour axe fixe A (fig. 20), les vitesses de ses divers points n'or en général une seule et même valeur, car les espaces parcourent dans un même temps sont évidemment p tionnels à leurs distances à l'axe fixe. Soit alors m la $\frac{p}{g}$ de l'un quelconque des points du corps tournant, ρ stance de cette massule à l'axe de rotation, la vitesse à l'instant où la vitesse angulaire du corps est ω sera, c ce qu'on a vu plus haut :

$$v = \omega \rho$$

On aura donc, pour la force vive de cette masse m :

$$m v^2 = m \omega^2 \rho^2 = \omega^2 . m \rho^2$$

et la vitesse *angulaire* ω de tous les points du corps é même, si nous désignons pour abréger par

$$\Sigma (m \rho^2) = m_1 \rho_1^2 + m_2 \rho_2^2 + m_3 \rho_3^2 + m_4 \rho_4^2 + .$$

la somme Σ des produits de chacune des petites mas m_2 m_3 m_4 qui composent la masse totale M par le ca leurs distances respectives à l'axe ρ_1 ρ_2 ρ_3 ρ_4, nous aur

$$\omega^2 \Sigma (m \rho^2)$$

pour l'expression de la force vive totale du corps tou

On a donné, avec Euler, le nom de *moment d'ine masse* à ce produit $\Sigma (m \rho^2)$. *La force vive d'un corp nant est donc en général le produit du carré de sa angulaire par le moment d'inertie de masse de ce*

109 *Des moments d'inertie et des centres de gravite* renverrons à notre *Aide-mémoire des ingénieurs* p détermination des moments d'inertie et celle des cent gravité des corps homogènes, remarquant seulement

1° *Qu'une* même masse homogène aura des momen

e, différents avec la position de l'axe autour duquel elle
ne;

Que le moment d'inertie d'une même masse homogène l'expression est la plus simple est celui qui se rapporte axe passant par le centre de gravité de cette masse;

Que l'on passe de la connaissance de ce dernier $\dot{I}$ à de tout autre moment d'inertie $\dot{I}'$ pris par rapport à utre axe *parallèle* au premier, en ajoutant simplement e produit de la masse tournante M par le carré D^2 de la nce D des deux axes, ainsi :

$$I' = I + MD^2$$

Que l'on a pour les moments d'inertie de masse pris rapport à un axe passant par le centre de gravité, sa-
:

ans le cas d'une *tige droite homogène* d'une petite section sverse, d'une longueur totale L tournant autour d'un axe endiculaire à L et passant par son milieu, M étant la masse ette tige

$$\dot{I} = \Sigma\ (m\rho^2) = \frac{1}{12} ML^2$$

s le cas d'un *plan rectangulaire mince* (fig. 21) tournant pendiculairement à sa face autour d'un axe passant par entre de figure du rectangle perpendiculairement à sa gueur L, M étant la masse du plan.

$$\dot{I} = \frac{1}{12} ML^2$$

indre plein tournant autour de son axe de figure, R étant rayon et M sa masse

$$\dot{I} = \frac{1}{2} MR^2$$

phère pleine tournant autour de son diamètre 2 R, M étant masse

$$\dot{I} = \frac{2}{5} MR^2$$

cône plein et droit tournant autour de son axe de figure, R étant le rayon de sa base et M sa masse

$$\text{I} = \frac{3}{10} \text{MR}^2$$

110. Quant aux *centres de gravité* de ces mêmes cor supposés homogènes, tout le monde sait ou pressent que po la *tige droite*, le *plan rectangulaire*, le *cylindre plein ou vid* la *sphère pleine ou vide*, il est au *centre de figure ou de v lume*.

Pour le *cône* droit et plein, il est au quart de la hauteur partir de la base, ou aux trois quarts de cette hauteur à pa tir du sommet.

Le centre de gravité d'un corps solide se meut d'ailleu comme le ferait un *point* matériel isolé ayant un poids ég au poids total du système et qui serait soumis à toutes l forces extérieures transportées en ce point parallèlement elles-mêmes (voyez ma *Mécanique des ingénieurs*.)

111. *Travail des forces qui agissent sur un corps traver par un axe fixe* (fig. 20). Soit M un corps quelconque coup par un plan horizontal, plan dans lequel agissent deux forc F, F', et qui est traversé par un axe vertical fixe A auto duquel le corps peut tourner librement.

Traçons autour de l'axe fixe A une circonférence ayant *mètre* de rayon, et de son centre A menons des perpendicu laires Aa' ou r', A a ou r aux directions des forces F' et F et supposons d'abord que la force F tende à faire tourner corps M dans le sens indiqué par la flèche, la force F' ten dant alors à empêcher ce mouvement; en d'autres terme considérons d'abord F comme force *mouvante* et F' comm force *résistante*.

Cela posé, évaluons les travaux mouvants et résistants pou un mouvement infiniment petit du système.

A$a = r$ étant perpendiculaire à la direction de F, le poi d'application a de cette force se mouvra initialement dans

direction propre de celle-ci, qui est évidemment tangente au cercle de rayon r désignant par $d\alpha$ le petit arc décrit dans le temps infiniment petit dt sur le cercle du rayon de 1 mètre, $r\,d\alpha$ sera l'arc décrit dans le même temps sur le cercle de rayon r. Or, pour un mouvement *virtuel* ou infiniment petit, cet arc $r\,d\alpha$ se confondra avec la petite tangente $a\,n$ décrite par le point d'application de F. On aura donc :

$$\text{Travail moteur élémentaire} = + F\,r\,d\alpha.$$

Mais le point d'application a' de la force résistante F' étant emporté lui-même initialement dans la direction, mais en sens contraire de F', on aura de même :

$$\text{Travail résistant élémentaire de } F' = - F'\,r'\,d\alpha.$$

A ce travail résistant de F', vient évidemment s'ajouter le travail élémentaire des forces d'inertie de toutes les molécules du corps M, ou la force vive élémentaire de ce corps.

Soit donc $\frac{p}{g} = m$ une des petites masses élémentaires de ce corps, ρ la distance de cette molécule à l'axe A, $\rho\,d\alpha$ sera le petit chemin qu'elle décrira dans le temps dt, et

$$m\rho\,\frac{d\alpha}{dt} = m\rho\omega$$

sera la quantité de mouvement qu'elle devra acquérir dans l'instant dt; $\omega = \frac{d\alpha}{dt}$ désignant la vitesse angulaire qu'elle a dû prendre.

$$m\rho\,\frac{d\omega}{dt}$$

sera donc la force d'inertie que cette molécule oppose à l'*accélération angulaire* $\frac{d\omega}{dt}$. Or, $\rho\,d\alpha$ est évidemment le che-

[illegible] par le point [illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible]

[illegible] moment pe[illegible]

[illegible]

$$[illegible]$$

[illegible] la demi-for[illegible] lorsque [illegible] F aura parcou[illegible]

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\Sigma\, m\rho^2 = (Fr - F'r')\,\alpha$$

[illegible] *dans les mouvements de rotation aussi bie[illegible]*

*dans les mouvements de transport parallèles, la demi-
se vive acquise, est numériquement égale à la somme al-
rique des travaux des forces qui l'ont produite.*

lonc, pour que la force vive acquise par le corps tournant vertu du travail des forces mouvante et résistante, soit le; en d'autres termes, pour que les forces FF' laissent corps tournant dans l'état de mouvement ou de repos dont ossissait avant que ces forces lui aient été appliquées, il dra que l'équation

$$(Fr - F'r')\,\alpha = \text{zéro}$$

t satisfaite. Ce qui suppose que l'on ait :

$$Fr = F'r'$$

que les *moments des forces mouvante et résistante soient ivalents et de sens contraire,* en appelant en général *mont d'une force* F, cette fraction Fr du travail $Fr\alpha$ de cette ce, qui est le produit de son intensité F, par la plus courte tance r de sa direction au point ou axe fixe A.

La condition de l'égalité des moments suffisant pour assurer uilibre *du corps,* quant à la rotation autour du point ou e fixe A, la statique, qui fait abstraction des qualités matérielles des corps, de leur inertie, et souvent de ces corps x-mêmes, dit alors que *deux forces sont en équilibre autour un point ou axe fixe, lorsque leurs moments par rapport cet axe sont équivalents et de sens contraires.*

112. Si les deux forces FF' tendaient à faire tourner le rps dans le même sens autour du point fixe A, les équations nérales ci-dessus prendraient les formes :

$$\frac{1}{2}\,\omega^2\Sigma\,(m\rho^2) = (Fr + F'r')\,\alpha$$

$$\omega = \frac{(Fr + F'r')}{\Sigma\,(m\rho^2)}\,t$$

t la vitesse angulaire ω du corps croîtrait sans cesse avec le mps t.

113. Quels que soient le sens et l'intensité des deux for
FF' (fig. 22) qui tendent à faire tourner le corps autour
point fixe A, *le moment* $R\rho$ *de leur résultante* R *est égal à*
somme algébrique ($Fr \pm F'r'$) *des moments de ces forces*
peut toujours être substitué à cette somme; car si, ce
est toujours permis, on transporte les deux forces FF' da
leur plan et suivant leurs directions; si l'on prend la diagon
ou résultante R de ces forces, et que, du point fixe A,
mène une perpendiculaire ρ à sa direction, on a, par un th
rème de pure géométrie attribué à Varignon (*Aide-mémo*
des ingénieurs, page 1158) :

$$R\rho = Fr \pm F'r'$$

le signe supérieur devant être pris lorsque les forces tend
à faire tourner dans le même sens, et le signe inférieur p
le cas où elles tendent à faire tourner en sens contraire.

Si, dans ce dernier cas, le point fixe A était situé sur la
rection même de la résultante R, ρ étant alors zéro, cette pu
sance et son moment disparaîtraient de l'équation ci-des
et l'on retomberait sur le principe d'équilibre de rotation

$$Fr = F'r'$$

de deux forces agissant autour d'un point fixe, principe
est celui de tous les *leviers* dont A serait l'appui.

114. Réciproquement, *si le moment* Fr *de la force qui te*
à faire tourner autour du point fixe A, *moins le moment* F
de celle qui tend à faire tourner en sens contraire autour
même point, est zéro, il faut en conclure que la résulta
R *de* F *et de* F' *passe par le point fixe* A.

Cet axe fixe A *est donc alors chargé* par la résultante
des deux forces FF'.

Or, si *i* est l'inclinaison mutuelle des directions de F et
on a, pour obtenir cette charge R :

$$F^2 = F^2 + F'^2 + 2FF' \cos. i$$

Donc si les forces F F' étaient parallèles et en équilibre autour du point fixe A, $i = o$ donnant cos. $i = 1$, on aurait :

$$R^2 = (F + F')^2, \text{ ou } R = F + F'$$

et la charge R sur l'axe serait alors égale à la somme des forces mouvantes et résistantes. Mais les moments F r et F' r' étant alors égaux entre eux, toute droite $l + l' = L$ qui, menée par le point fixe A, rencontrera les directions des forces FF', sera coupée au point A, en parties ll' telles, qu'on aura évidemment :

$$\frac{l}{l'} = \frac{r}{r'}. \text{ Or, } \frac{r}{r'} = \frac{F'}{F}; \text{ donc, } \frac{F'}{F} = \frac{l}{l'}$$

lorsque deux forces parallèles sont en équilibre sur une droite passant par un point fixe, ce point fixe divise la droite en parties réciproquement proportionnelles à ces forces.

On tirerait des équations du travail et des forces vives une foule d'autres théorèmes qui forment le fond des traités de statique. Mais ces théorèmes n'ont plus guère d'utilité que dans les questions relatives à la *stabilité des constructions ;* car, dans le *calcul des machines,* il y aura toujours avantage à leur préférer les considérations qui dérivent de la notion du *travail des forces.* Nous donnons ci-dessous quelques applications de ces théories.

115. Proposons-nous d'abord de déterminer comment les pressions ou poussées se répartissent dans une ferme en charpente.

Ferme sans tirant, appelons (fig. 23) :

p le poids moyen du mètre carré de toiture, y compris la couverture, les pannes, les chevrons, les arbalétriers ;

L la demi-portée de la ferme ;

i l'inclinaison des arbalétriers sur l'horizon ;

d la distance *d'une ferme* à la suivante ;

R la résultante des efforts qui agissent au pied A d
balétrier ;

α l'inclinaison de cette résultante sur la verticale ;

a la longueur de l'arbalétrier $= \frac{L}{\cos. i}$;

h la montée de la ferme $=$ L tang. i;

$\frac{p d L}{\cos. i}$ sera la charge portée par chaque arbalétrier;
pour abréger :

$$\frac{p d L}{\cos. i} = P$$

et décomposons cet effort vertical P appliqué au mi
chacun des arbalétriers en composantes parallèles app
à leurs extrémités A, B, A'. Nous aurons ainsi trois for
ticales, savoir :

$$\frac{1}{2} P \text{ en A}; \ \frac{1}{2} P \text{ en A}', \text{ et } 2\left(\frac{P}{2}\right) = P \text{ en}$$

Décomposant de nouveau cette dernière force P (ap
en B) en deux autres z, z' dans le sens des arbalétri
aura :

$$z = z' = \frac{P}{2 \sin. i}$$

pour la moitié des efforts exercés aux points A, A' d
direction des arbalétriers.

Transportant z en A et l'y décomposant horizontale
verticalement, on a pour la composante horizontale H d
la poussée horizontale :

$$H = H' = z \cos. i = \frac{P}{2 \text{ tang.} i} = \frac{PL}{2h}$$

et pour la composante verticale :

$$z \sin. i = \frac{P}{2}$$

Ajoutant la composante verticale $\frac{1}{2}$ P qui agit déjà en A, on a pour l'effort vertical V total qui agit au pied de chaque arbalétrier :

$$V = P.$$

Ainsi la résultante R de tous les efforts qui poussent le mur sur lequel pose la sablière, a pour intensité :

$$R = \sqrt{V^2 + H^2} = P\sqrt{1 + \frac{1}{4 \operatorname{tang.}^2 i}} = H\sqrt{1 + 4 \operatorname{tang.}^2 i}$$

Quant à sa direction, elle est déterminée par :

$$H = V \operatorname{tang.} \alpha, \text{ d'où } \operatorname{tang.} \alpha = \frac{1}{2 \operatorname{tang.} i} = \frac{L}{2h}$$

Ainsi la tangente de l'inclinaison $\dot{I}$ de la résultante par rapport à *l'horizon* est double de la tangente de l'inclinaison i du toit :

$$\operatorname{tang.} \dot{I} = 2 \operatorname{tang.} i = \frac{2h}{L}$$

La demi-portée L restant la même, la valeur de i qui rendra *minimum* l'effort R sur le mur, est donnée par :

$$\operatorname{tang.} i = \sqrt{\frac{1}{2}}, \text{ ou } h = 0.707\,L, \text{ ou } i = 35^\circ 16'$$

la poussée *horizontale* H devient, dans ce dernier cas :

$$H = P\sqrt{\frac{1}{2}} = 0.707\,P$$

116. *Ferme avec tirant*— On opérerait pour ce cas comme pour le cas précédent, et l'on parviendrait aux mêmes résultats, à cela près que :

$$H = \frac{P}{2 \operatorname{tang.} i} = \frac{PL}{2h} = -T$$

serait alors la valeur de la tension T exercée sur le tirant, et que la poussée horizontale H étant détruite par cette tension, la résultante R se réduirait à $V = P$, chacun des murs d'appui ne subissant plus qu'une charge verticale P.

Si l'entrait était situé à une distance verticale x en contre-bas du faîte (fig. 24), on aurait pour sa tension T', à cause de l'égalité des moments :

$$T'x = Hh = \frac{PL}{2}, \text{ ou } T' = \frac{PL}{2x}$$

Voyez, pour d'autres applications du même genre, l'article *Poussée des charpentes* de mon *Aide-Mémoire des Ingénieurs*.

117. Problème. — *Un cylindre plein, dont le poids est* P *et le rayon* R, *roule sur la pente d'un plan incliné dont la longueur est* L *et la hauteur* H; *on demande la vitesse* V *acquise par son axe au bas du plan.*

Puisque le cylindre *roule*, le travail $PH = FL$ de la gravité, doit produire ici, non-seulement la force vive de *translation* $\frac{P}{g}V^2$ du système, mais encore une autre force vive de *rotation* du cylindre autour de son axe de figure ; or, cette dernière est le produit du moment d'inertie $\Sigma(m\rho^2) = \frac{P}{2g}R^2$ par le carré ω^2 de la vitesse angulaire ω. Et comme, dans le cas dont il s'agit, on a $\omega R = V$, la force vive de rotation devient $= \frac{P}{2g}V^2$. Egalant le travail PH à la demi-somme de toutes les forces vives acquises, on a donc, en appelant i l'inclinaison du plan sur l'horizon :

$$PH = \frac{1}{2}\frac{P}{g}V^2 + \frac{1}{4}\frac{P}{g}V^2 = \frac{3}{4}\frac{P}{g}V^2$$

d'où résulte, pour la vitesse cherchée au bas du plan :

$$V^2 = \frac{4}{3}gH = \frac{4}{3}g \sin. iL$$

et pour la vitesse v, lorsque l'axe est descendu seulement de h, ou n'a encore parcouru qu'une longueur l :

$$v^2 = \frac{4}{3} gh = \frac{4}{3} g \sin. i \,.\, l$$

$$v = \sqrt{\frac{4}{3} gh} = \sqrt{\frac{4}{3} g \sin. i \,.\, l}$$

Si le cylindre avait glissé sans frotter ni rouler le long du plan, son axe aurait acquis, après être descendu de la hauteur verticale h, une vitesse :

$$u = \sqrt{2gh} = \sqrt{2g \sin. i \,.\, l}$$

ainsi, la vitesse v de translation est réduite à :

$$v = u\sqrt{\frac{2}{3}}, \text{ ou } v^2 = \frac{2}{3} u^2$$

par l'effet de la rotation.

Pour obtenir l'*accélération* $\varphi = \frac{dv}{dt}$, on différentiera l'expression :

$$v^2 = \frac{4}{3} g \sin. i \,.\, l$$

et remarquant que $\frac{dl}{dt} = v$, on aura :

$$\varphi = \frac{dv}{dt} = \frac{2}{3} g \sin. i$$

Ainsi la rotation n'empêche pas l'accélération de l'axe d'être constante ; seulement elle la réduit aux *deux tiers* de la valeur $g. \sin. i$ qu'elle aurait prise, si toutes les parties du cylindre eussent été seulement animées d'un mouvement de transport parallèle à la longueur du plan.

Un cylindre plein et homogène ne parcourt donc, en roulant le long d'un plan incliné, que les deux tiers du chemin

qu'il parcourrait dans le même temps, s'il glissait sans frott ni rouler le long du plan.

Voyez, pour le cas du cylindre *creux* et pour celui des *sphèr pleines* et *creuses*, mon *Aide-mémoire des ingénieurs*, pag 1281, ou ma *Mécanique des ingénieurs*, première partie.

CHAPITRE VIII.

Quelques notions d'Hydraulique.

118. *Principe fondamental.* — Les liquides transmette dans tous les sens et également les pressions qu'on exerce leur surface. On connait ce principe sous le nom d'*égalité pression.*

On fait ici abstraction de la pesanteur et de la compre sibilité du liquide.

Si donc une force P agit sur une partie A de la surfac d'un liquide renfermé dans un vase, la pression p qu'el exerce sur une autre partie de la surface ou sur la surfac totale a des parois mouillées, est :

$$p = \frac{a\,\mathrm{P}}{\mathrm{A}}$$

Si l'on rapporte la pression P à l'unité de surface (le ce timètre, décimètre carré), c'est-à-dire si l'on fait A = on a :

$$p = a\,\mathrm{P}$$

La pression qu'éprouve en tous sens une molécule que conque d'un fluide pesant en équilibre dans un vase est éga au poids d'un filet vertical de ce fluide qui aurait pour ha teur la distance de cette molécule au plan de la surface s périeure du fluide.

Le fond d'un vase, quelle que soit la forme de ce vas pourvu que la base soit horizontale, éprouve donc, de la pa *du fluide qu'il* contient et qui est en équilibre, une pressic

ı poids P d'une colonne fluide qui aurait pour base
.ême du vase a et pour hauteur h la distance de ce
lan de niveau, ou :

$$p = Pah$$

ıse était inclinée ou courbe, il faudrait compter la
partir du centre de gravité de la surface de cette

ȝ *l'écoulement de l'eau.*— Si sur les parois d'un vase
ı en communication avec l'atmosphère on perce un
luide en sortira avec une vitesse v égale à celle qu'un
ıit acquise en tombant librement de la hauteur h
ɜntre l'orifice et le niveau de l'eau dans le vase ;
n imitant de point en point les raisonnements du
a été traité de l'*écoulement de l'air*, on aurait, en né-
ı double influence de la pression atmosphérique p_0
ɜ le liquide à la fois de dedans en dehors et de
dedans :

$$v = \sqrt{\frac{2gp'}{\Pi'}}$$

; pression par mètre carré que le liquide exercerait
rifice, et $\Pi' = 1000$ kilog. le poids du mètre cube
h désignant la hauteur supposée constante du ni-
eau au-dessus du centre de l'orifice, on a évidem-

$$p' = \Pi' h, \text{ ou } h = \frac{p'}{\Pi'},$$

$$\text{d'où } v = \sqrt{2gh} = 4^{m}.43\sqrt{h}$$

ın faite de la résistance de l'air.

Problème.

ıau d'un réservoir restant constamment de $1^{m}.224$
de l'orifice de sortie, on demande quelle sera la
ɜorique de l'eau à la sortie du réservoir?

On a $v = 4^m.43\sqrt{h} = 4^m.43\sqrt{1.2240} = 4^m.43 \times 1.$ = enfin 4.873, ou approximativement 4^m 9, c'est-à-dire qu l'eau sortirait de l'orifice avec une vitesse de $4^m.9$ par seconde C'est au moyen de cette formule qu'on a calculé la table sui vante.

Vitesses par seconde, et Hauteurs de chute correspondante exprimées en mètres.

VITESSES	HAUTEURS	VITESSES	HAUTEURS	VITESSES	HAUTEURS
mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.	mètres.
0.1	0.0005	2.5	0.319	4.9	1.224
0.2	0.0020	2.6	0.345	5.0	1.274
0.3	0.0046	2.7	0.372	5.1	1.326
0.4	0.0082	2.8	0.400	5.2	1.378
0.5	0.0127	2.9	0.429	5.3	1.432
0.6	0.0184	3.0	0.459	5.4	1.486
0.7	0.0250	3.1	0,490	5.5	1.542
0.8	0.0326	3.2	0 522	5.6	1.599
0.9	0.0413	3.3	0.555	5.7	1.656
1.0	0.0510	3.4	0.589	5.8	1.715
1.1	0.0617	3.5	0.624	5.9	1.774
1.2	0.0734	3.6	0.661	6.0	1.835
1.3	0.086	3.7	0.698	6.1	1.897
1.4	0.100	3.8	0.736	6.2	1,960
1.5	0.115	3.9	0.775	6.3	2.023
1.6	0.131	4.0	0.816	6.4	2.088
1.7	0.147	4.1	0.857	6.5	2.154
1.8	0.165	4.2	0.899	6.6	2.221
1.9	0.184	4.3	0.943	6.7	2.288
2.0	0.204	4.4	0.987	6.8	2.357
2.1	0.225	4.5	1.032	6.9	2.427
2.2	0.247	4.6	1.079	7.0	2.498
2.3	0.270	4.7	1.126	7.1	2.570
2.4	0.294	4.8	1.174	7.2	2.643

120. Si S est l'aire de l'orifice, Q la quantité ou volume d'eau écoulé en une seconde, et qu'on appelle la *dépense*, on a

$$Q = Sv = 4^{m}.43\ S\sqrt{h} \text{ mètres cubes},$$

L'orifice étant circulaire et d'un diamètre d

$$S = 0.785\ d^2,$$

$$\text{et } Q = 3.48\ d^2\sqrt{h} \text{ mètres cubes}.$$

C'est la dépense *théorique;* mais de même que pour les gaz la dépense réelle est moindre. La veine fluide à sa sortie se contracte, et il en résulte une diminution dans le produit de l'écoulement. L'expérience a fait connaître que D étant la dépense théorique que nous savons trouver,

$D \times 0.62$ est la dépense réelle si l'orifice est percé dans une mince paroi.

$D \times 0.82$ est celle qui a lieu si l'écoulement se fait par un petit ajutage cylindrique, et elle devient $D \times 0.9$ si l'ajutage est conique.

Ces nombres 0.62, 0.82, 0.9 sont les coefficients de contraction de la veine fluide. Si nous désignons ce coefficient par m afin d'avoir une expression plus générale, Q désignant maintenant la dépense réelle, on a :

$$Q = mSv = 3.48\ d^2 m\sqrt{h}$$

Dans l'*Art du Fontainier*, les dépenses s'expriment en pouces d'eau; c'est le produit d'un tuyau de fontaine qui donnerait 20 mètres cubes d'eau en 24 heures, ou $0^{m.c}.0002315$ par seconde (1). Ainsi la dépense en pouces d'eau serait exprimée par :

$$Q = 15028\ m d^2\sqrt{h} \text{ pouces d'eau}.$$

(1) Le *pouce d'eau* est réellement la quantité d'eau qui s'écoule en une minute par un orifice circulaire d'un pouce de diamètre, le centre étant enfoncé de 7 lignes au-dessous du niveau ; mais les hydraulistes ont beaucoup varié sur ce produit. On entend aujourd'hui par pouce d'eau l'écoulement qui produit 672 pouces cubes par minute = 13.33 litres par minute = 560 pieds cubes en vingt-quatre heures = 19 2 mètres cubes en vingt-quatre heures = 800 litres ou kilogrammes par heure. La ligne d'eau e

121. Si à un réservoir plein d'eau on adapte une conduite rectiligne d'une longueur L, ayant partout même diamètre D, et entièrement ouverte à son extrémité, H étant la hauteur du niveau de l'eau dans le réservoir au-dessus de l'extrémité du tuyau par laquelle l'eau s'écoule (si cette extrémité était elle-même submergée, il faudrait retrancher sa profondeur au-dessous de l'eau), v la vitesse d'écoulement, q le volume d'eau dépensé en une seconde; l'expérience a montré que l'on avait à peu près :

$$v = 26^{m}.40 \sqrt{\frac{HD}{L + 36\,D}}$$

$$q = 20.73 \sqrt{\frac{HD^5}{L + 36\,D}} \text{ mèt. cub.}$$

ou Q désignant cette dépense en pouces d'eau :

$$Q = 87749 \sqrt{\frac{HD^5}{L}} \text{ pouces.}$$

$$D = 0^{m}.01054 \sqrt[5]{\frac{LQ^2}{H}}$$

Ces formules sont suffisamment exactes pour la pratique.

M. de Prony est parvenu aux formules suivantes, qui sont d'accord avec l'expérience pour des conduites qui ont jusqu'à 2280 mètres de longueur; mais il faut que $\frac{D}{L}$ ne dépasse pas $\frac{1}{100}$, D n'étant lui-même pas moindre qu'un centimètre.

Selon lui, l'unité de mesure étant le mètre :

$$v = 26.79 \sqrt{\frac{DH}{L}}$$

le 144e du pouce, ou 4.67 pouces cubes par minute = 55.5 litres par heure environ. Nous évaluons ici le pouce d'eau à 20 mètres cubes au lieu de 19.2, pour plus de simplicité.

20 mètres cubes sont ce que M. de Prony appelle le *double module* d'eau.

$$D = 0.1865 \sqrt[5]{\frac{L q^2}{H}}$$

Problème.

On demande de calculer, au moyen de la formule de M. de Prony, quelle serait la vitesse d'écoulement par un diamètre d'un décimètre, la longueur de la conduite étant de 20 mètres, et la hauteur du niveau au-dessus de l'orifice $= 4^m$. ?

$$\text{on a } v = 26.79 \sqrt{\frac{DH}{L}} = 26.79 \sqrt{\frac{4}{200}}$$

$$= 26.79 \times \frac{2}{14.14} = \frac{5358}{1414} = 3^m.789.$$

DE L'AIR ATMOSPHÉRIQUE.

L'air est un fluide pesant. On prétend que cette vérité, soupçonnée même avant *Aristote*, n'a été véritablement démontrée qu'en 1640, par *Galilée*, et confirmée un peu plus tard par les expériences de *Torricelli* et celles de *Pascal*.

La pression de l'air, comme celle de tous les autres fluides pesants, ne s'exerce pas seulement de haut en bas, elle comprime, dans tous les sens, les surfaces des corps que l'air touche : et comme il résulte des expériences de Pascal que l'air fait équilibre à une colonne de mercure de 28 pouces de hauteur, équivalente elle-même à une colonne d'eau de 32 pieds ou à une colonne de mercure de $0^m.760$, il en résulte que lorsqu'un corps est exposé à l'air, chaque point de sa surface est pressé, comme il le serait par le poids d'une colonne d'eau de 32 pieds de hauteur.

Problème.

Déterminer approximativement le poids de toute la mass d'air qui environne le globe.

Soit R le rayon moyen de la terre, r la hauteur donné du filet de mercure auquel la pression de l'atmosphère fai équilibre ; π le rapport de la circonférence au diamètre, D la pesanteur spécifique du mercure. On cherchera les volumes de deux sphères, dont l'une a pour rayon $R + r$ et l'autr R, et on retranchera le second volume du premier,

$$\text{ce qui donne } \frac{4\pi\,(R+r)^3}{3} - \frac{4\pi R^3}{3}$$
$$= 4\pi\left(R^2 r + r^2 R + \frac{r^3}{3}\right)$$

On multipliera ce reste par D, et observant que les termes qui contiennent r^2, et à plus forte raison, r^3, peuven sans erreur sensible être négligés, on aura pour l'expressio très-approchée du poids demandé :

$$4\pi D R^2 r = 12.56 \times 13.56 \times (6366198)^2 \times 0.76$$
$$= 5{,}236{,}279{,}225{,}196{,}350{,}000 \text{ kilogrammes,}$$

13.56 étant le poids spécifique du mercure, et 0.76 la hauteur moyenne du baromètre.

La densité des couches atmosphériques décroissant à mesure qu'on s'élève, il est clair que la colonne de mercure devra s'abaisser. Une évaluation grossière montre qu'en s'élevant de 10 mètres ½ le baromètre baisse à peu près d'un millimètre, ou 1 ligne pour 12 toises.

Tableau des Pressions que supporte un mètre carré de surface, suivant les hauteurs du baromètre.

HAUTEUR du baromètre en millimètres.	PRESSION sur un mètre carré en kilogrammes.	HAUTEUR du baromètre en millimètres.	PRESSION sur un mètre carré en kilogrammes.	HAUTEUR du baromètre en millimètres.	PRESSION sur un mètre carré en kilogrammes.
millim.	kilog.	millim.	kilog.	millim.	kilog.
500	6793	600	8152	700	9510
510	6929	610	8287	710	9646
520	7065	620	8423	720	9782
530	7201	630	8559	730	9918
540	7336	640	8695	740	10054
550	7472	650	8831	750	10189
560	7608	660	8967	760	10325
570	7744	670	9103	770	10461
580	7880	680	9238	780	10597
590	8016	690	9374	790	10733

On voit que le baromètre étant à 780, une surface de 1 mètre supporte 10597 kilog., et que cette énorme charge se réduit à 9782 kilog., quand le baromètre tombe à 720 : ainsi, la surface entière du corps étant à peu près de 1 mètre carré, nous sommes dans ces circonstances soulagés d'un poids de 815 kilog.

USAGE DU BAROMÈTRE POUR LA MESURE DES HAUTEURS.

Soit x la différence de niveau en mètres entre les deux stations, l la latitude du lieu qu'il n'est pas nécessaire de connaître exactement, H la hauteur du baromètre à la station inférieure, le thermomètre centigrade à l'air libre marquant T degrés, h, t, les mêmes choses à la station supé-

rieure, θ la différence de température du baromètre dans les deux stations, on a :

$$x = a\,(\log.\,H - \log.\,h - 0.00008\,\theta)$$
$$[1 + 0.002\,(T + t)]\,(1 + \alpha\cos.\,2\,l),$$

le log. de a étant 4.2646526 et celui de $\alpha = \bar{3}.45287$.

Application à l'une des opérations de M. RAMOND, *sur le Puy-de-Dôme.*

Baromètres.		Thermomètres libres.	Tempér. du barom.	Lat.
Clermont. . .	H = 72cm.852	T = 28°.3	24°.7	4[illegible]
Puy-de-Dôme.	h = 70 . 565	t = 25°.5	27°.8	4[illegible]
		T + t = 53°.5	θ = - 3.1	

$$\begin{array}{rl|rl}
\text{Log.}\ \alpha = & \bar{3}.45287 & \log.\ H = & 1.86244 \\
\text{Log.}\ \cos.\ 2\,l = & \bar{2}.42746 - & -\ 0.00008\ \theta = & +\ 25 \\
 & \bar{5}.88033 - & -\ \log.\ h = & 1.84859 \\
 & & & 0.01410 \\
 & & \log.\ a = & 4.26465 \\
 & & \log.\ 1.1076 = & 0.04438 \\
 & & \ldots\ \log. = & \bar{2}.14922 \\
\text{Nombre} = & 0.000076 & & \\
1 + \alpha\cos. = & 0.999924\ldots & \log. = & \bar{1}.99997 \\
 & & \log.\ x = & 2.45822
\end{array}$$

qui répond à $x = 287^{m}.22$.

On doit à M. Oltmans des tables qui n'exigent point un calcul aussi long pour arriver au résultat ; on les trouve chaque année dans l'*Annuaire du Bureau des longitudes*.

L'air est non-seulement pesant, il est en outre éminemment compressible et dilatable. Si l'on suppose d'abord que sa température reste invariable, on peut admettre, avec *Mariotte*, que p et p' étant les pressions par mètre carré exercées contre les enveloppes qui les contiennent par les volumes

v et v' d'une même masse d'air, *les produits* p v, p' v' *de ces volumes par les pressions qu'ils subissent ou qu'ils exercent restent constants*; d'où,

$$pv = p'v'$$

en réalité, l'air se comprime un peu plus que cette loi dite de *Mariotte* ne le suppose.

L'air se dilate, d'ailleurs, pour chaque degré centigrade du thermomètre de la fraction 0.003665 du volume qu'il occupait à la température zéro, désignant par t et t' les températures en degrés centigrades d'une même masse d'air, par p et p' les pressions par mètre carré qui correspondent aux volumes v et v' de cette masse; on aura donc, entre ces quantités, la relation

$$pv(1+\alpha t') = p'v'(1+\alpha t)$$

en faisant 0.003665 = α.

Le poids du mètre cube d'air à zéro et sous la pression d'une colonne de mercure de $0^m.760$ de hauteur ayant été trouvé $= \Pi_0 = 1^k.299$ environ; on a, dès lors, pour le poids π du mètre cube d'air à t degrés au-dessus de zéro et sous la pression d'une colonne de mercure d'une hauteur h

$$\Pi = \frac{\Pi_0 h}{0.760\,(1+\alpha t)}$$

Problème.

On demande s'il est possible de produire un vide parfait sous le récipient d'une machine pneumatique.

Que V représente le volume du récipient et v celui du corps de pompe. Lorsque le piston s'élèvera, l'air du récipient, en vertu de sa force élastique, se répandra dans le corps de pompe, et occupera par conséquent l'espace total $V+v$. Il entrera donc dans le corps de pompe une portion de sa masse représentée par $\frac{v}{V+v}$, et cette portion ne rentrera jam-

dans le récipient. Si l'on désigne par 1 la quantité d'ai s'y trouvait d'abord, on voit qu'après le premier cou piston elle se trouvera réduite à $1 - \frac{v}{V+v} = \frac{V}{V+}$

Après le second coup de piston, elle ne sera plus que $\frac{}{V}$ de ce qu'elle était après le premier, c'est-à-dire qu'elle $\left(\frac{V}{V+v}\right)^2$. En continuant à raisonner ainsi, on voit près

1 2 3 4 n

coups de piston, les quantités enlevées sont

$$\frac{v}{V+v},\ \frac{vV}{(V+v)^2},\ \frac{vV^2}{(v+V)^3},\ \frac{vV^3}{(v+V)^4},\ \frac{vV^{n-}}{(v+}$$

et qu'il reste successivement dans la machine les fractio ce volume exprimées par

$$\frac{V}{V+v},\ \frac{V^2}{(V+v)^2},\ \frac{V^3}{(V+v)^3},\ \frac{V^4}{(V+v)^4},\ \frac{V^n}{(V+}$$

Il n'est donc point possible d'obtenir un vide parfait, que soit le nombre n des coups de piston, puisque la fra $\frac{V^n}{(V+v)^n}$, qui représente la quantité d'air restante, ne jamais devenir nulle, bien qu'elle aille toujours en s'affa sant à mesure que n augmente. Si l'on demandait :

Problème.

Quelle est la quantité d'air extraite après n coups de ton?

Il est clair qu'il faudrait trouver la somme S des te d'une progression par quotient, dont le premier term *ici* $\frac{v}{V+v}$.

La raison $\frac{V}{V+v}$ et le dernier terme $\frac{v\,V^{n-1}}{(V+n)^n}$, on obtiendrait (voyez au Dictionnaire, à la fin du volume, le mot *Progression*) :

$$S = 1 - \frac{V^n}{(V+v)^n}.$$

Problème.

Le rapport entre la capacité d'un des deux corps de pompe d'une machine pneumatique, et un ballon dans lequel on veut faire le vide, est 5 : 12. Le ballon contient $5^{lit}.35$ d'air ; on demande combien il restera d'air, après huit coups de piston, et l'on demande aussi les quantités extraites, et les restes, après le premier, le deuxième, le troisième coup de piston ? Les formules donnent, —

Coups de piston.	Quantités extraites en litre.	Restes en litre.
1er.	1.573.	2.776
2e.	1.111.	2.666
3e.	0.784.	1.882
4e.	0.553.	1.328
5e.	0.391.	0.938
6e.	0.276.	0.662
7e.	0.195.	0.467
8e.	0.137.	0.330

il reste donc, après huit coups de piston, 0.330.

Sous une seule pression atmosphérique, la densité de l'air étant à peu près la 770e partie de la densité de l'eau, il en résulte que sous une pression de 770 atmosphères, l'air est aussi dense que l'eau. Ainsi, au fond de la mer, à une profondeur de 770 fois 32 pieds, ou de 24,640 pieds, qui font à peu près deux lieues, l'air serait plus pesant que l'eau, et, quoiqu'à l'état gazeux, il ne pourrait point s'élever pour venir à la surface.

DILATATION.

La plupart des corps se dilatent quand la temp lève, et se condensent quand elle s'abaisse.

La dilatation est linéaire, superficielle ou cub que l'on considère la longueur, la surface ou le corps qui y est soumis : δ étant la dilatation lin dilatation superficielle, et Δ la dilatation cubiqu relations approchées :

$$\Delta = 3\delta \qquad D = 2\delta$$

Dans un même corps solide, la dilatation lin être proportionnelle au nombre des degrés du th comptés depuis 0 jusqu'à 100°.

Cette dilatation varie, d'ailleurs, pour chaque doit à *Laplace* et *Lavoisier* une table de ces dilat les corps les plus employés dans les arts.

δ étant la dilatation linéaire du corps par degré le 1000e du nombre de la table, ou le 80e, si l'o thermomètre dit de Réaumur ; t le nombre de longueur à 0, l' celle du corps dilaté, S la surfac surface après la dilatation, V le volume à 0, V du corps dilaté.

On a assez exactement pour la pratique :

$$V' = V\ (1 \pm 3\delta t)$$
$$S' = S\ (1 \pm 2\delta t)$$
$$l' = l\ (1 \pm \delta t).$$

On se sert du signe supérieur ou inférieur sel augmentation ou diminution de chaleur.

Ces formules exigent qu'on connaisse les dim mais si l'on voulait connaître une dimension V *température* t'', au moyen des dimensions V' S' l *température* t', on se servirait de :

$$V'' = \frac{V'(1 + 3\delta t'')}{1 + 3\delta t'}$$

$$S'' = \frac{S'(1 + 2\delta t'')}{1 + 2\delta t'}$$

$$l'' = \frac{l'(1 + t'')}{1 + \delta t'}.$$

dilatations linéaires qu'éprouvent différentes sub-
, depuis le terme de la congélation de l'eau jusqu'à son ébullition, d'après MM. LAPLACE *et* LAVOISIER.

NOMS es substances.	DILATATIONS en décimales.	 en fractions vulgaires.
ion trempé.. . . .	0.0010791	1/927
de coupelle. . . .	0.0019097	1/523
. . . .	0.0017173	1/582
jaune ou laiton. .	0.0018782	1/533
le Falmouth. . . .	0.0021730	1/462
ux forgé.	0.0012205	1/819
id passé à la filière.	0.0012350	1/812
lass anglais. . . .	0.0008117	1/1248
départ.	0.0014661	1/682
titre de Paris. . .	0.0015515	1/645
).	0.0008565	1/1167
. . . .	0.0028484	1/356
de Saint-Gobain. .	0.0008909	1/1122

rcure se dilate, en volume, depuis zéro
ju'à l'*eau bouillante*, de. 0.018018

L'eau, de. . . . . 0.
L'alcool, de. 0.
Tous les gaz, à peu de chose près, comme
l'air atmosphérique, de. . . . . 0.
nombre qui correspond à la fraction vulgaire 1

Personne n'ignore que pour que le mouvement de à pendules soit régulier, il est nécessaire que la lo pendule soit constante, c'est-à-dire que le systèm composant le pendule soit tel, que les dilatations o tractions causées par le changement de températu pensent. Le premier appareil de ce genre fut, di giné et employé par *Graham*, célèbre horloger a tige de son pendule était en fer; mais, au lieu d'u métallique, il y avait adapté un vase de verre qu'i sait en partie de mercure. (*Voyez* fig. 26.)

La température s'élevant, la tige s'allonge, et le cend; mais le mercure se dilate, et le centre de g lève au-dessus du fond du vase. Pour simplifier question, nous supposerons que la tige est de verr le vase qui contient le mercure, et nous demando

Problème.

Connaissant les dilatations du mercure et du v que les longueurs des diverses parties de l'appare termine par le calcul la quantité de mercure qu'il tre dans le vase pour que le centre d'oscillation d ne monte ni ne descende quand la température v

Soit $CD = l$, la hauteur inconnue du mercur centre de gravité du cylindre de mercure se trouver au milieu de sa hauteur, c'est-à-dire à une distan du vase $= \frac{y}{2}$. La distance de ce point à l'axe d sion C sera donc $l - \frac{y}{2}$, que nous nommerons L.

expression qu'il faut rendre constante, en faisant entrer dans le calcul les dilatations des diverses matières.

r étant le rayon du cylindre de mercure à la température initiale, on aura pour son volume v :

$$v = \pi r^2 y$$

A t degrés, le rayon r du vase deviendra $r(1 + kt)$, k étant la dilatation linéaire du verre, mais y variera aussi et deviendra, par exemple y'; en même temps le volume v du mercure deviendra $v(1 + k''t)$, k'' désignant la dilatation *cubique* du mercure, de sorte que l'on aura :

$$v(1 + k''t) = \pi r^2 (1 + kt)^2 y'$$

divisant cette équation par la précédente, on a :

$$\frac{v(1 + k''t)}{v} = \frac{\pi r^2 (1 + kt)^2 y'}{\pi r^2 y},$$

d'où

$$y' = y\,\frac{(1 + k''t)}{(1 + kt)^2}.$$

= la hauteur du mercure dans le vase après le changement de température; mais k'' et k étant des fractions extrêmement petites, on peut en négliger les carrés et les produits pour ne conserver que les premières puissances, cette expression devient ainsi :

$$y' = y + y(k'' - 2k)\,t.$$

Cela posé, reprenons l'équation :

$$\mathrm{L} = l - \frac{y}{2}.$$

La température s'élevant de t degrés, sa nouvelle valeur L' deviendra, à cause de la dilatation :

$$\mathrm{L}' = l - \frac{y}{2} + \left(lk - \frac{y}{2}(k'' - 2k)\right)t;$$

mais puisque le problème exige que cette valeur soit égale

à la première, il faut egaler à 0 le terme variable affi
t, et chercher, d'après cette condition, la valeur de y
donc

$$\left(lk - \frac{y}{2}(k'' - 2k)\right) t = 0,$$

d'où $$2lk - y(k'' - 2k) = 0,$$

d'où enfin $$y = l\,\frac{2k}{k'' - k}.$$

La dilatation linéaire du verre, ou k, est 0.0000087 dilatation cubique du mercure ou $k'' = 0.0001847$. substituant ces nombres dans la formule, on trouve

$$y = \frac{l}{9.55}$$

d'où l'on voit que la longueur du cylindre de mercu être à très-peu de chose près le $^1/_{10}$ de la longueur to l'appareil.

Problème.

Quelles doivent être les longueurs des tringles de cu de fer d'un pendule composé de quatre châssis asse comme le représente la figure 27, pour que la longu du pendule demeure constante, malgré les changem température ?

Appelons L la longueur GS; $l = AC = BD =$ lo des tringles extérieures en fer; $l' = A'C' = B'D' =$ lo des tringles intérieures; $\lambda = AC = bd =$ longueur d gles de cuivre, et $\lambda' = a'c' = b'd' =$ longueur des t intérieures de cuivre; $SF = a$, $TG = T =$ la ve pendule fixée au point T, mais glissant à frottement à CD et $c'd'$, F = dilatation du fer C celle du cuivre.

De la seule inspection de la figure, on déduit cette tion :

$$L = a + l + l' + T - \lambda - \lambda'.$$

Pour t degrés on aura la nouvelle valeur :

$$L' = a + l + l' + T - \lambda - \lambda'$$
$$+ \Big((a + l + l' + T)\,F - (\lambda + \lambda')\,C\Big)\,t.$$

De sorte que, pour l'immobilité du centre de gravité, il faut, de même que dans le problème précédent, poser la condition

$$(a + l + l' + T)\,F - (\lambda + \lambda')\,C = 0 ;$$

mais notre première équation donne :

$$a + l + l' + T = L + \lambda + \lambda'.$$

En substituant cette valeur dans la dernière, il vient :

$$(L + \lambda + \lambda')\,F - (\lambda + \lambda')\,C = 0,$$

d'où $\quad (\lambda + \lambda')\,(C - F) = L F,$

d'où enfin $\quad \lambda + \lambda' = \dfrac{L F}{C - F}.$

Mais la dilatation du cuivre est à celle du fer, à très-peu près, comme 5 est à 3 ; on a donc

$$\lambda + \lambda' = \frac{L\,3}{5 - 3} = \frac{3}{2}\,L,$$

c'est-à-dire que pour que la compensation soit établie, il fau donner dans le système actuel à la somme des tringle cuivre une valeur égale à trois fois la demi-longueur d pareil.

En général, pour qu'il y ait compensation, il fa l'on compare la somme des longueurs des bran cales de l'un des métaux, à la somme des longueu métal, ces nombres soient entre eux en raison dilatations linéaires respectives.

... DILATATION DES SOLIDES.

... années, au Conservatoi
... que les deux murailles
... l'une de l'autre, et tendai
... effet, aux bouts des pl
... d'une part et d'autre, d
... également espacés, et l
... terminées par des vis
... Cela suffisait p
... les rapprocher, et anc
... d'échauffer
... de deux l'u
... leurs écrous,
... plus serr
... les lamp
... et ra
... l'effet de ce rapp
... pas été chauffé
... serrer leurs écr
... les premi
... peu da
... si on
... par un mouvement
... tendait d'abo
...

... par tous les ... tous ceux ... La dimensio ... des barres de fer employées à ce prétendu ... que la moindre poussée des murs ... infailliblement leurs écrous.

CHAPITRE IX.

Du Son.

›n est le résultat de certains mouvements vibratoires ts dans les corps susceptibles de ces mouvements. Ces ons sont communiquées à l'air, et de l'air à l'oreille. on ne se transmet point dans le vide.

ou moins les vibrations du corps sonore sont rapides, son est aigu ou grave, et les limites de cette rapidité 2 et 8200 vibrations par seconde; le son produit par ribrations par seconde n'est même plus appréciable; est donné par un tuyau d'orgue de 32 pieds de lon-, ouvert à son extrémité. Un son fort ou faible parcourt l'air 337m.118 par seconde. (Quand on n'a pas besoin grande exactitude, on prend 340 mètres en nombres pour la vitesse du son.) Cette vitesse est la même à les hauteurs de l'atmosphère qu'au niveau de la mer, ıpérature étant supposée constante; mais elle est beau-plus grande dans les solides et dans les liquides que les gaz.

Problème.

observateur, situé à une certaine distance d'un édifice e à produire un écho, a remarqué un chasseur placé en-i et le même édifice. Le chasseur fait feu, et il s'écoule secondes entre cet instant et celui où il entend l'explo-quatre secondes plus tard, il entend le coup répété une de fois. A quelle distance de l'observateur se trouvent asseur et l'édifice?

son parcourt 340 mètres par seconde. Le chasseur est à $3 \times 340 = 1020$; mais en même temps que le son par-à l'observateur, il s'avance vers l'édifice avec la même se, le frappe, et, dans l'exemple actuel, il est déjà sur le

retour lorsque l'explosion frappe pour la première fois son oreille. Il a donc mis, en effet, $4+3=7''$ à lui parvenir, c'est-à-dire qu'il a parcouru 2380 mètres. Or, $2380-1020 = 1360$, la moitié de ce nombre $= 680$ sera la distance du chasseur à l'édifice, et $1020+680=1700$ mètres sera celle de l'observateur à l'édifice.

Vibrations des cordes. — Soit une corde cylindrique de rayon r, de longueur l, tendue par un poids P attaché à une de ses extrémités, δ ce que pèse l'unité de volume de la matière qui la compose, π la demi-conférence dont le rayon est 1, N le nombre de vibrations faites par la corde, dans un temps donné T ; soit enfin, g la gravité, V le volume de la corde, P son poids ; on démontre qu'on a, entre ces diverses quantités, les relations suivantes :

$$V = \pi r^2 l \qquad P = \pi r^2 l \delta$$

$$T = N r l \sqrt{\frac{\pi \delta}{g P}} \qquad N = \frac{T\sqrt{gP}}{r l \sqrt{\pi \delta}};$$

Si $T = 1''$, on a :

$$N = \frac{\sqrt{gP}}{r l \sqrt{\pi \delta}};$$

Si n n' sont les nombres de vibrations de deux cordes égales, tendues par des poids P P', ou de longueurs différentes l l', on a :

$$\frac{n}{n'} = \frac{\sqrt{P}}{\sqrt{P'}} = \frac{l'}{l}.$$

Problème.

On demande de déterminer le nombre de vibrations pour tous les sons de la gamme naturelle majeure, en regardant comme son fondamental celui que rend une corde vibrant dans

· longueur, et sachant que les longueurs des cordes

lantes à ces sons

$$
\begin{array}{cccccccc}
\text{Ut} & \text{Ré} & \text{Mi} & \text{Fa} & \text{Sol} & \text{La} & \text{Si} & \text{Ut,} \\
= 1 & \frac{8}{9} & \frac{4}{5} & \frac{3}{4} & \frac{2}{3} & \frac{3}{5} & \frac{8}{15} & \frac{1}{2}
\end{array}
$$

$$N = \frac{\sqrt{gP}}{rl\sqrt{\pi\delta}}$$

it pour *ré*, *l* étant l'unité,

$$N = \frac{\sqrt{gP}}{r\,{}^8/_9\,l\sqrt{\pi\delta}} = \frac{9\sqrt{gP}}{8rl\sqrt{\pi\delta}},$$

mi, $N = \frac{5\sqrt{gP}}{4rl\sqrt{\pi\delta}}$;

fa, $N = \frac{4\sqrt{gP}}{3rl\sqrt{\pi\delta}}$,

si de suite, d'où l'on voit qu'en faisant

$$\frac{\sqrt{gP}}{rl\sqrt{\pi\delta}} = 1,$$

ra pour les nombres relatifs de vibrations :

$$
\begin{array}{cccccccc}
1 & \frac{9}{8} & \frac{5}{4} & \frac{4}{3} & \frac{3}{2} & \frac{5}{3} & \frac{15}{8} & 2 \\
\text{Ut} & \text{Ré} & \text{Mi} & \text{Fa} & \text{Sol} & \text{La} & \text{Si} & \text{Ut.}
\end{array}
$$

Observation.

voit que l'octave est donnée par la moitié de la longue corde : il n'y a donc rien de plus facile que de prolon ries autant qu'on le voudra. Les octaves aiguës d xemple, seraient rendues par les fractions

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8} \text{ etc.}$$

longueur qui donne ce ... est elle-mê

de la corde totale, on aurait donc :

$$\frac{8}{9} \times \frac{1}{2}, \quad \frac{8}{9} \times \frac{1}{4}, \quad \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{4}{9}, \quad \frac{2}{9}, \quad \frac{1}{9}$$

pour les longueurs de ^{1}*ré*, ^{2}*ré*, ^{3}*ré*, etc., le nombre de vibrations correspondantes serait $\frac{9}{4}$, $\frac{9}{2}$, 9. . .

Problème.

On appelle *intervalle* de deux sons le rapport des nombres de vibrations relatives à ces deux sons. On demande de trouver les *intervalles* des tons successifs de la gamme ci-dessus.

On aura de *ut* à *ré* $\frac{9}{8} = \frac{9}{8}$,

de *ré* à *mi* $\frac{5/4}{9/8} = \frac{40}{36} = \frac{10}{9}$,

de *mi* à *fa* $\frac{3/4}{4/5} = \frac{16}{15}$,

et on formerait la série suivante :

	Tons mineurs.	Tons majeurs.	Semi-tons majeurs.
De *ut* à *ré*.		$\frac{9}{8}$	
ré à *mi*	$\frac{10}{9}$		
mi à *fa*.	. . . . . .	. . . . . .	$\frac{16}{15}$
fa à *sol*.		$\frac{9}{8}$	
sol à *la*	$\frac{10}{9}$		
la à *si*.		$\frac{9}{8}$	
si à *ut*..	. . . . . .	. . . . . .	$\frac{16}{15}$

On voit donc qu'on appelle ton majeur l'intervalle $\frac{9}{8}$, et ton mineur celui $\frac{10}{9}$.

Problème.

Une note est diésée ou bémolisée selon que sa valeur primitive (le nombre de vibrations) est multipliée par $\frac{25}{24}$ ou par $\frac{24}{25}$. On demande le nombre de vibrations correspondant à toutes les notes diésées ou bémolisées de la gamme.

On trouve, pour le nombre relatif de vibrations, *ut* étant toujours l'unité :

Notes.		Vibrations.
Ut	$= 1 \ldots\ldots\ldots\ldots$	1
Ut dièse	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\frac{25}{24}$
Ré bémol	$= \frac{9}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{216}{200} = \ldots$	$\frac{27}{25}$
Ré	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\frac{9}{8}$
Ré dièse	$= \frac{9}{8} \times \frac{25}{24} = \frac{225}{192} = \ldots$	$\frac{75}{64}$
Mi bémol	$= \frac{5}{4} \times \frac{24}{25} = \frac{120}{100} = \ldots$	$\frac{6}{5}$
Mi	$= \ldots\ldots\ldots\ldots$	$\frac{5}{4}$
Mi dièse	$= \frac{5}{4} \times \frac{25}{24} =$ [illegible]	125 / 9[illegible]
Fa bémol	$= \frac{4}{3} \times \frac{24}{25} =$ [illegible]	[illegible]
Fa	$= \ldots$ [illegible]	[illegible]

$$\textit{Fa}\ \text{dièse} = \frac{4}{3} \times \frac{25}{24} = \frac{100}{72} = \ldots \frac{25}{18}$$

$$\textit{Sol}\ \text{bémol} = \frac{3}{2} \times \frac{24}{25} = \frac{72}{50} = \ldots \frac{36}{25}$$

$$\textit{Sol} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{3}{2}$$

$$\textit{Sol}\ \text{dièse} = \frac{3}{2} \times \frac{25}{24} = \frac{75}{48} = \ldots \frac{25}{16}$$

$$\textit{La}\ \text{bémol} = \frac{5}{3} \times \frac{24}{25} = \frac{120}{75} = \ldots \frac{8}{5}$$

$$\textit{La} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{5}{3}$$

$$\textit{La}\ \text{dièse} = \frac{5}{3} \times \frac{25}{24} = \ldots\ldots \frac{125}{72}$$

$$\textit{Si}\ \text{bémol} = \frac{15}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{360}{200} = \ldots \frac{9}{5}$$

$$\textit{Si} = \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{15}{8}$$

$$\textit{Si}\ \text{dièse} = \frac{15}{8} \times \frac{25}{24} = \frac{375}{192} = \ldots \frac{125}{64}$$

$$\textit{Ut}\ \text{bémol} = 2 \times \frac{24}{25} = \ldots\ldots \frac{48}{25}$$

$$\textit{Ut} = \ldots\ldots\ldots\ldots 2$$

Il suffit pour les octaves plus basses ou plus élevées multiplier ou de diviser ces valeurs par la puissance d qui marque le rang de ces octaves.

Problème.

On demande de composer une série de sons qui comm cent par le *sol* de la gamme naturelle d'*ut*, et dont les torvalles se succèdent dans le même ordre que ceux de gamme.

Comparons les intervalles des deux gammes ; on a, comme us l'avons vu :

$$\text{ervalles } \frac{9}{8}\ \frac{10}{9}\ \frac{16}{15}\ \frac{9}{8}\ \frac{10}{9}\ \frac{9}{8}\ \frac{16}{15}\ \frac{9}{8}\ \frac{10}{9}\ \frac{16}{15}\ \frac{9}{8}$$

de *ut ré mi fa sol la si ut ré mi fa sol*

$$\text{tervalles } \frac{10}{9}\ \frac{9}{8}\ \frac{16}{15}\ \frac{9}{8}\ \frac{10}{9}\ \frac{16}{15}\ \frac{9}{8}$$

de *sol la si ut ré mi fa sol.*

On voit que dans chacune les intervalles de la première à seconde note et de la seconde à la troisième, diffèrent fort u ; en effet, le rapport de ces intervalles est $\frac{{}^{10}/_{9}}{{}^{9}/_{8}} = \frac{80}{81}$ qui diffère de l'unité que de $\frac{1}{81}$. Cette quantité est inappréble à l'oreille ; il n'y a donc pas lieu d'altérer ces interlles, et généralement on peut confondre, dans la pratique la musique, l'intervalle $\frac{9}{8}$ avec celui $\frac{10}{9}$; les intervalles *mi* à *fa*, de *fa* à *sol*, de *sol* à *la*, dans la première, sont actement les mêmes que ceux de *si* à *ut*, de *ut* à *ré*, de *é* à *mi*, dans la seconde ; mais l'intervalle $\frac{9}{8}$ de *la* à *si*, ffère sensiblement de celui $\frac{16}{15}$ de *mi* à *fa*. On ne peut aisser le *mi*, car on altérerait son intervalle au *ré*, qui t ce qu'il doit être pour le but que l'on se propose. Il faut onc *diéser* le *fa* en le multipliant par $\frac{25}{24}$; l'intervalle de *i* à *fa* deviendra $\frac{16}{15} \times \frac{25}{24} = \frac{10}{9}$ sensibleent équivalent, comme l'on sait, à $\frac{81}{...}$ ... ais puisque *fa* est ainsi élevé d'un ... intervalle de *la* à *sol* est diminué d'un demi-ton, son inte... donc pl...

$\frac{9}{8} \times \frac{24}{25} = \frac{27}{25}$, et c'est ce qu'il doit être ;
vient égal à $\frac{16}{15}$, en le multipliant par $\frac{81}{80}$, q
diffère trop peu de l'unité pour n'être point con
elle.

Il suffit donc, lorsqu'on veut prendre *sol* p
de diéser le *fa*.

Si l'on eût pris *fa* pour *tonique*, on eût trouvé
bémoliser le *si*.

Tartini a, le premier, reconnu que lorsqu'on f
à la fois deux cordes assez rapprochées, et do
sons différents, un troisième son grave et faibl
se fait entendre en même temps ; il n'examina
toutes les circonstances de ce phénomène. Le g
a, depuis, complété la série de ces expériences
qu'au lieu d'une résultante, il y en avait le plus
seconde plus ou moins sensible, et il est parven
fort simple. Les deux sons soumis à l'expérien
présentés l'un par son nombre de vibrations n, e
le nombre $n+m$, les deux résultantes sont c
$(n-m)$ et m.

Problème.

On demande la résultante de la consonnan
ut étant 1 et *sol* $\frac{3}{2}$, on a $n = 1$, $n + m =$
$m = 0.5$. Les résultantes sont donc $n - m = 1 -$
et $m = 0.5$, c'est-à-dire qu'elles sont toutes deu
qu'on obtient l'*ut* au-dessous de celui dont on e

Problème.

On demande de déterminer le nombre absolu d

que font par seconde les quatre cordes à vide du violoncelle *ut, sol, ré, la,* supposant que l'*ut* fondamental qui répond au son le plus bas du bourdon, fasse 125 vibrations simples par seconde.

Il est clair que les vibrations correspondantes sont entre elles comme les nombres de la table :

$$1 : \frac{3}{2} : \frac{9}{4} : \frac{10}{3},$$

ou comme leurs octaves ; il suffit donc de multiplier ces nombres par 125, et l'on obtient

ut		*sol*	*ré*		*la*
125	:	$187\,{}^1/_2$	$281\,{}^1/_4$	:	$416\,{}^2/_3$.

Personne n'ignore que dans les instruments à sons fixes, tels que le piano, l'orgue, la guitare, les instruments à vent, les dièses et les bémols sont confondus, c'est-à-dire qu'une note inférieure diésée est la même que la note supérieure bémolisée. Nous avons vu cependant que ces sons ne devaient point être confondus, puisqu'ils n'avaient pas la même valeur. On peut donc dire qu'à la rigueur *les instruments à sons fixes ne sont jamais justes ;* on y divise la gamme en douze demi-tons égaux en intervalles, et c'est en cela que consiste le *tempérament*. On faisait autrefois subir des altérations aux accords les moins usités ; aujourd'hui que l'art musical s'est perfectionné, et qu'il n'existe plus d'accords qu'on puisse regarder comme rarement employés, on est revenu au *tempérament égal*.

Problème.

Cela posé, et remarquant d'une part que les nombres de vibrations accomplies en une seconde, par les diverses parties d'une même corde vibrante sont, en raison inverse, des longueurs de ces parties ; — et de l'autre, que, sous la même tension, les sons émis respectivement par une corde vibrante

et par la moitié de cette corde sont, entre eux, à intervalle d'octave, on demande les longueurs relatives des diverses parties d'une corde de 1 mètre qui donneraient les onze demi-tons intermédiaires.

La question revient à celle-ci : insérer 11 moyens proportionnels géométriques entre 1 et 0.5, ce qui conduirait à l'extraction d'une racine douzième

$$q = \sqrt[12]{2}\,.$$

qu'on obtient avec assez d'approximation par logarithm (p. 1054).

$$\log.\ q = \frac{0.3010300}{12} = 0.02508583$$

$$q = 1{:}059463$$

On a donc, pour les longueurs de la partie de la co 1 mètre à faire vibrer, la corde étant supposée donn grave lorsqu'elle vibre à vide :

1m.00000 ut_1	0m.943874 *ut dièse* ou *ré bémol*	0m.890898 *Ré*
0m.840896 *Ré.d* = *mi.b*	0m.793700 *mi* = *fa.b*	0m.7491 *fa.*
0m.707106 *fa.d* = *sol.b*	0m.667370 *sol*	0m.629 *sol.d* =
0m.594603 *la*	0m.561231 *la.d* = *si.b*	0m.52 *si* =
0m.500000 ut_2 = *si.d*		

Ce tableau peut servir à diviser un *mono* *rament* égal, après avoir donné à la corde que la division 0m.594603 vibre à l'unisso

CHAPITRE X.

De la Lumière.

LUMIÈRE. — 1. Fluide impondéré dont les molécules jaillissent dans toutes les directions de chacun des points des corps dits lumineux. L'observation montre que, dans le vide ou dans un milieu physiquement et chimiquement homogène, la lumière se meut rigoureusement en ligne droite, de telle sorte que l'attraction terrestre ne paraît exercer sur elle aucune action sensible. Au contraire, dans les milieux hétérogènes qu'elle traverse obliquement, la lumière se meut suivant une ligne courbe, de sorte que, vus à travers l'atmosphère dont les couches sont nécessairement de densités inégales, les corps nous apparaissent en des points qu'ils n'occupent pas réellement.

2. L'*intensité* de la lumière projetée sur une surface par un point lumineux, décroît dans un milieu homogène comme le carré de sa distance à la surface augmente, et le décroissement absolu paraît considérable, même dans les milieux les plus transparents.

Dans l'air, par exemple, la lumière perd environ un tiers de son intensité en parcourant une longueur horizontale de 1500 mètres.

Un morceau de verre à glace de $0^m.08$ d'épaisseur affaiblit d'environ moitié la lumière qui le traverse normalement.

Herschell a, toutefois, trouvé, en opérant sur une lame de verre ordinaire à faces parallèles, parfaitement polie et d'une épaisseur à peu près égale à celle des oculaires à fort grossissement, que de cent mille rayons qui tombent perpendiculairement sur un pareil verre, il n'en absorbe que 5200 et en laisse passer 94800.

Trois mètres d'eau de mer en absorberaient environ les deux cinquièmes.

Un feu de 1 mètre de largeur, vu la nuit, d'une distance de 12 lieues, n'apparaît que comme une étoile tertiaire.

Cependant, suivant M. *de Zach*, 200 grammes de poudre brûlés en plein air donnent une lumière qui, durant le jour, peut être aperçue de plus de 7 lieues, et, durant la nuit, de 40 à 50 lieues de distance, bien que l'observation se fasse hors de toute portée des instruments d'optique, et qu'il y ait même quelque montagne interposée.

3. La *vitesse* de la lumière dans l'espace est d'environ 308 millions de mètres ou 77000 lieues par seconde ; elle emploie $8^m.13^s$ à parvenir du soleil à la terre, et plus de quatre heures pour venir d'*Uranus*. Un boulet de canon qui conserverait sa vitesse initiale, ferait moins de chemin en un an que la lumière en une seconde. On admet que la vitesse de la lumière est *uniforme*.

4. *Réflexion de la lumière*. — Lorsqu'un rayon lumineux I O, fig. 28, rencontre une surface polie M, il s'y réfléchit de telle sorte que le plan de réflexion coïncide avec le plan d'incidence, et que l'angle d'incidence est égal à l'angle de réflexion. Ces angles sont ceux que forment le rayon incident I O, et le rayon réfléchi O O' avec la normale à la surface M au point O d'incidence.

Ce principe explique comment les miroirs plans M, M' doivent nous faire voir les images des objets dont ils peuvent recevoir les rayons lumineux, et comment ces images sont *symétriques* de ces objets par rapport au plan du miroir.

L'image *symétrique* d'un corps par rapport à un plan est celle qu'on obtiendrait en abaissant de tous les points du corps des perpendiculaires à ce plan — perpendiculaires qu'on prolongerait au-delà du plan, chacune d'une quantité égale à elle-même. L'ensemble des extrémités de ces lignes formerait l'image *symétrique*. Des caractères d'imprimerie, qu'on présenterait devant une glace, ne pourraient donc être lus 'e la droite vers la gauche.

: *théorie des instruments à réflexion* (p. 293 de mon

ide-Mémoire des ingénieurs) repose tout entière sur l'é-
alité des angles d'incidence et de réflexion ; on déduit faci-
lement de ce seul principe le théorème suivant, qui leur est
immédiatement applicable :

Lorsqu'un rayon lumineux I O, fig. 28, *tombe sur un miroir plan* M, *s'y réfléchit, puis rencontre un deuxième miroir plan* M' *sur lequel il se réfléchit de nouveau, l'angle* y, *formé par la direction du rayon incident et par celle du dernier rayon réfléchi est double de l'angle* x *des miroirs.*

On a, en effet, pour l'angle extérieur a au triangle O O' A

$$a = b + x$$

et dans ce même triangle

$$b + c + a + x = 180^\circ = c + 2b + 2x$$

mais dans le triangle O O' L

$$c + 2b + y = 180^\circ$$

donc

$$y = 2x$$

Et quand les miroirs M et M' sont parallèles, le premier rayon incident et le dernier rayon réfléchi sont aussi parallèles.

On démontrerait de même que s'il y avait quatre réflexions entre deux miroirs faisant un angle x, l'angle formé par le premier rayon incident et le dernier rayon réfléchi serait = $4x$; — que pour six réflexions, il serait $= 6x$; — pour huit réflexions, $8x$, et ainsi de suite.

On démontrerait encore, que, si un miroir plan tourne sur son axe, le mouvement angulaire de l'image est double de celui du miroir.

6. *La réflexion sur les surfaces courbes* s'opère en un point quelconque, comme elle aurait lieu sur le plan tangent à la surface courbe en ce point.

Donc, un point lumineux placé au centre d'une sphère intérieurement polie, enverrait à tous les points de cette surface des rayons lumineux qui reviendraient au centre après réflexion.

Placé au foyer d'un ellipsoïde, les rayons én
point lumineux se croiseraient tous à l'autre foy
draient au premier après une seconde réflexion,
suite.

Un paraboloïde qui recevrait des rayons paral
axe, les réfléchirait à son foyer; et, réciproque
réfléchirait parallèlement à son axe, s'ils émana
foyer.

Pour les calottes sphériques, concaves ou con
générateur de la surface ne dépassant pas 20 à 3
plus, on aurait :

R étant le rayon de courbure du miroir,

D la distance d'un point lumineux au miroir, dist
tée sur la normale menée du point lumin
roir,

I distance du foyer ou de l'image au miroir après
comptée sur la normale :

$$\pm \frac{1}{I} = \frac{2}{R} \mp \frac{1}{D}.$$

Les signes supérieurs s'appliquant aux miroirs
les signes inférieurs aux miroirs convexes.

Lorsque I devient négatif, on a ce qu'on appel
virtuel, c'est-à-dire un point où les rayons réflé
contreraient s'ils étaient prolongés en arrière du
miroirs convexes ne donnent que des foyers *virt*

7. La réflexion de la lumière n'est jamais comp
dépit de l'opinion de Huyghens, les miroirs mé
mieux polis en absorbent toujours une partie.

D'après *Bouguer*, sur 1000 rayons tombant su
un angle avec la surface de 1/2 degré, 721 seu
réfléchis; — il n'y en a plus que 211 sous un an
— 65 pour 30°, — 18 sous un angle de 60° à 9

Sur 1000 rayons qui tombent sur la première su
lame de verre à glace, 543 sont réfléchis sous l'

avec la surface, — 300 pour 15°, — 112 pour 30°, — 25 pour des angles de 60° à 90°.

Le marbre noir poli, sur 1000 rayons incidents, en réfléchit 600 sous l'angle de 3° 15', — 156 sous 15°, — 51 sous 30°, — 23 sous des angles de 60° à 90°.

Le mercure et les miroirs métalliques présenteraient, toujours d'après *Bouguer*, un décroissement moins rapide, et, sur 1,000 rayons incidents, plus de 700 seraient réfléchis sous un angle très-petit avec la surface, et environ 600 ou plus de la moitié, lorsque cet angle est voisin de 90°, et je trouve, dans les expériences de *W. Herschell*, la confirmation de ce résultat.

D'après *Herschell*, si 100000 rayons tombent à peu près perpendiculairement sur un miroir plan, parfaitement poli, et de l'espèce d'alliage qu'il employait dans ses télescopes, il s'en réfléchira 67300.

Enfin, *Fresnel* a trouvé que la quantité de lumière réfléchie par les corps diaphanes sous l'angle de 70° à 90°, est $^1/_{23}$ de la lumière incidente.

8. *Réfraction de la lumière*, fig. 29. Un rayon lumineux IM qui passe *obliquement* d'un *milieu* XNY dans un autre XN'Y se dévie de sa route primitive ou se *réfracte*, l'un de ces milieux fût-il le vide.

Un milieu est différent d'un autre milieu par cela seul que leurs densités sont différentes.

IMN *angle d'incidence* est celui *a* que fait le rayon incident IM avec la normale MN au plan de séparation des deux milieux.

RMN' = *e* = *angle de réfraction* est celui que forme le rayon réfracté MR avec le prolongement MN' de la normale MN.

Lorsqu'il n'y a qu'une simple réfraction (elle est double pour certaines substances), 1° le plan de réfraction coïncide avec le plan d'incidence, il est normal à la surface de sép

ration des milieux ; 2° le quotient que l'on obtient en d sant le sinus I O de l'angle d'incidence par le sinus R O' l'angle de réfraction est une quantité sensiblement consta pour deux mêmes milieux, quelle que soit l'obliquité de l cidence. N étant ce quotient constant relatif à deux mê milieux, quotient que l'on appelle leur *indice de réfracti* on a donc :

$$N = \frac{\sin. a}{\sin. e}$$

c'est la loi de *Snellius* attribuée à tort à *Descartes*, qui seulement confirmée.

Dans le passage de l'air à l'eau, on a, à très-peu p $N = \frac{4}{3}$ ou $4 \sin. e = 3 \sin. a$.

Si le rayon lumineux partait de R, MR serait alors le ra incident, MI le rayon réfracté et $\frac{\sin. e}{\sin. a} = \frac{1}{N} =$ in *de réfraction inverse*, ou de l'eau à l'air, aurait nature ment pour valeur la fraction $\frac{3}{4} = \frac{1}{N}$.

Sin. *a* ne pouvant jamais être plus grand que 1, il en sulte que, pour le cas de l'eau et de l'air, sin. *e* ne peut devenir plus grand que $\frac{3}{4}$ ou 0.75000, et ce sinus é celui de 48° 36', cette valeur est l'*angle limite* pour ces flui Ainsi ceux des rayons émanés d'un corps lumineux qui, sortir de l'eau, se présenteront à la surface de séparation sous un angle plus grand que l'*angle limite* 48° 36' n'en tiront pas et rentreront dans le liquide : réciproquem quelque petit que soit l'angle formé avec la surface liq par les rayons émanés d'un point lumineux placé dans ces rayons n'éclaireront pas directement l'angle liquide plémentaire de l'angle *limite*.

9. Je choisis dans la longue série des *Indices de réfra*

par les physiciens, ceux d'entre eux qui intéres-
ique. La plupart de ces résultats sont dus à M.

ices de réfraction par rapport au vide.

SUBSTANCES.	INDICES.
. . . .	1.000
sous la pression $0^m.76$. . .	1.000294
. . . .	1.336
. . . .	1.343
. . . .	1.310
. . . .	1.374
ive.	1.470
linaire..	1.525
Saint-Gobin.	1.543
feuilles..	de 1.514 à 1.542
plomb 1 flint.	2.028
plomb 1 sable..	1.987
plomb 1 flint.	1.830
plomb 1 flint.	1.787
plomb 2 flint.	1.724
ass.	de 1.525 à 1.533
s.	de 1.576 à 1.625
uge oncé.	1.729
loré en rouge par l'or. . .	1.715
angé..	1.695
ale.	1.635
rt.	1.615
se.	1.570
urpre.	1.608
bouteilles.	1.582
aqueuse de l'œil.	1.337
entier.	1.384

N' étant les indices par rapport au vide de deux
S, S', l'indice de la seconde par rapport à la pre-
$\frac{N'}{N}$.

Ainsi, l'indice de l'eau par rapport à l'air serait $\frac{1.336}{1.00029}$ et, comme ce diviseur diffère très-peu de 1, on voit que indices, par rapport au vide de la table ci-dessus, so très-peu près les indices par rapport à l'air, c'est-à-dire q peuvent être pris sans erreur sensible pour le quotient sinus d'incidence dans l'air, par le sinus de la réfraction d la substance indiquée à la table.

L'indice du verre ordinaire par rapport à l'eau serait d $\frac{1.525}{1.336} = 1.141$, c'est-à-dire que si un rayon lumineux j sait de l'eau dans le verre, le sinus de l'incidence dans l' serait $= 1.141 \times$ sinus de la réfraction dans le verre.

En général (mais non pas toujours), le rayon lumi se rapproche de la normale dans le milieu le plus de Donc, le sinus diminue en passant d'un milieu moins d à un milieu plus dense, et l'indice est alors plus grand l'unité. C'est le contraire lorsque le rayon passe d'un mi plus dense à un milieu qui l'est moins. Il faut, toutefois cepter de cette règle les matières combustibles. Ainsi, cool, l'huile, l'éther, moins denses que l'eau, dévient plus celle-ci les rayons lumineux, et l'eau elle-même, ainsi q diamant, étant douée d'une influence plus grande que supposent leurs poids spécifiques respectifs, *Newton* n'l pas à avancer que ces substances devaient contenir des cipes combustibles; assertion que l'expérience confirm ans plus tard.

Réfraction atmosphérique. — Lorsque l'atmosph parfaitement calme, la densité de ses diverses cou d'autant plus grande qu'elles sont plus rapprochées d face terrestre. Il en résulte que lorsqu'un objet qu plus ou moins éloigné du centre de la terre que celu serve, envoie à cet observateur un rayon lumine une direction qui diffère de la verticale, ce rayon s'infléchir suivant une courbe toujours concave à

rayon ne pénétrant dans les lunettes ou dans
rvateur que, suivant la tangente à cette courbe
l occupe, l'objet lui apparait en un lieu plus
:st réellement, de toute la hauteur angulaire r,
re la tangente à la trajectoire et la corde de
corde que suivrait le rayon lumineux s'il se
le vide.

est l'*angle de réfraction atmosphérique* qu'on
implement la *réfraction*.

:ion terrestre. — Lorsque l'observateur et le
serve sont situés tous deux dans les limites de
et surtout dans le voisinage de la surface ter-
'ractions deviennent très-irrégulières, et parfois
arres, que la trajectoire du rayon lumineux,
concave à la surface terrestre, devient convexe
rs les signaux *au-dessous* du lieu qu'ils occu-
Il arrive même que des *réfractions latérales*
, et que le rayon lumineux dévie, soit à droite,
du plan vertical, passant par l'œil et le point
. Cependant, l'influence de la *réfraction* sur
es nivellements géodésiques a fait chercher si,
nstances atmosphériques favorables, il était pos-
par une sorte de moyenne constante m l'arc
ui sépare la verticale d'un signal et celle du point
erve, avec l'angle de réfraction r qui élève ha-
ce signal au-dessus de son lieu réel. En d'autres
cherché les valeurs moyennes de m pouvant sa-
ormule empirique,

$$r = mC$$

bre a trouvé en France, pour les valeurs de m
s brumeux, et en hiver seulement 0.15 — plus
it 0.08 à 0.10 en hiver, — 0.06 à 0.08 en été. —
encore 0.038 à l'équateur, — 0.052 en Italie, —
onie, — 0.072 en Angleterre, — 0.063 en Au-

triche, — 0.07 à 0.09 en Suisse, — 0.0783 à la mer en ...
en automne, — et, faute de mieux, on s'accorde, en Fr...
lorsque l'atmosphère est parfaitement calme, lorsque le...
gles de hauteur sont assez faibles, lorsque les densités des co...
ches d'air peuvent être regardées comme constantes, à fai...

$$r = 0.08\ C \text{ ou } r'' = (0.08)\ C''$$

en exprimant en *secondes* l'arc terrestre C et l'angle *r* ...
réfraction.

On tiendra donc suffisamment compte de la réfracti...
moyenne vers la surface du sol en France, dans les tem...
calmes, en prenant pour la valeur de cet angle le douziè...
environ ($^{10}/_{125}$) de l'arc compris entre les verticales de l'o...
servateur et du signal.

Or, comme la seconde terrestre répond à une distance...
30m.864, on voit que la correction à faire sur la hauteur a...
gulaire d'un signal placé à environ 1850 mètres, atteindr...
à peine cinq secondes.

Les effets de cette réfraction peuvent être approximati...
ment évalués en *mètres*, lorsque l'observateur et le sig...
sont l'un et l'autre très-rapprochés de la surface terres...
supposée sphérique. Ce cas se présentant souvent dans la p...
tique du NIVELLEMENT, nous nous y arrêterons un mom...
(fig. 30.)

L'axe prolongé d'un niveau N, lorsqu'il est réglé, est ...
tangente N*o'* à la surface terrestre ou à une surface sph...
que concentrique à celle-ci. Le point *o'* où cette tang...
rencontre le signal ou la *mire*, détermine la hauteur ou ...
de niveau M*o'*. Pour obtenir cette cote, but direct du ni...
lement, on élève successivement le voyant de la mire jus...
ce qu'il apparaisse dans la direction de l'axe optique N*o*...
la lunette. Or, en vertu de la réfraction *r*, cette *appar*...
a lieu lorsque le voyant est en *o*, par exemple, avant ...
ait atteint le point *o'* qui appartient à la tangente. Le po...
mire lit donc et inscrit une cote en mètres M*o* = *a* trop...
ble de la quantité *oo'* = *e* dont la réfraction a élevé le voy...

cote a, il faut donc *ajouter* e pour avoir la cote réelle $=a+e$ que je fais $=h$. Or, si les points NM sont assez s de la surface terrestre pour être censés lui appartenir, i l'excès sur le rayon terrestre OM, de la sécante Oo' rc terrestre NM, ou ce qu'on appelle dans l'art du niaent l'excès du *niveau apparent* No' sur le *niveau vrai* Cet excès h sous-tendant l'angle o'NM, comme e sous- l'angle de réfraction $r=o$No', et ces angles étant très- , on peut, sans erreur notable, supposer la proportio-

$$h : e :: o'\mathrm{NM} : o'\mathrm{N}o :: {}^1/_2\,\mathrm{C} : r :: {}^1/_2\,\mathrm{C} : 0.08\,\mathrm{C}$$

ıngle o'NM formé par la tangente No' et la corde NM, r mesure la moitié de l'arc terrestre C, et de son côté .08 C en moyenne. De cette proportion, on tire pour la : de e en mètres

$$e = 0.16\,h$$

l'approximation que l'on emploie dans le *nivellement*.

Pour obtenir e en fonction de la distance en mètres k bservateur au signal, on peut remarquer que la tan- No' donne

$$(\mathrm{N}o')^2 = h\,(h + 2\mathrm{R})$$

elant R le rayon terrestre $=6366198^{\mathrm{m}}$. Négligeant d'une ı hauteur h devant le diamètre terrestre 2R, de l'autre ıt la longueur k de l'arc NM pour celle de sa tangente l vient

$$= \frac{k^2}{2\mathrm{R}} \quad \text{d'où } e = \frac{0.08\,k^2}{\mathrm{R}} = k^2 \times \frac{0.01257}{1000000}$$

montre que les *haussements* en mètres, dus à la ré- n en terrain horizontal, sont entre eux comme les des distances du signal à l'observateur, et que le haus- t absolu e atteint environ $0^{\mathrm{m}}.01257$ pour la première ce de *un* kilomètre.

DES LENTILLES.

14. En vertu de la *réfraction* qui s'opère à l'entr sortie des verres connus sous le nom de *lentilles*, mentent ou diminuent, suivant leurs formes, la co des rayons lumineux qui les traversent.

Toutes les courbures des lentilles sont sphériques *méros* par lesquels on les désigne encore aujourd'l ment en *pouces anciens* le rayon de la sphère dont est une calotte. Une lentille du nº 4 appartient d sphère de 4 pouces de rayon.

En combinant la surface plane avec la surface s on n'obtient que six formes réellement différentes auxquels on donne également le nom de *lentilles* la lentille biconvexe possède seule la forme que son pelle immédiatement.

L'*axe principal* d'une lentille, est la droite qui les centres de courbure de ses deux faces. L'une de étant plane, le rayon de courbure de ce côté est in

Le *foyer principal* d'une lentille est le point, où d lumineux incidents et parallèles à l'*axe principal* se croiser après la réfraction à travers sa substanc les rayons réfractés divergent au lieu de conver l'intersection de leurs prolongements qu'on prend p et ce foyer est imaginaire ou *virtuel*.

Formules. — Prenons le centre d'une lentille po des distances; convenons de regarder comme po toutes les distances mesurées du côté des rayons et comme *négatives* celles qui seront mesurées côté de la lentille; négligeons l'épaisseur du ve l'ouverture est d'ailleurs supposée ne pas atteindre au plus, soient enfin :

f la distance focale principale;
D la distance d'un objet au centre optique;

I la distance au même centre de l'image de cet objet donnée par la lentille ;

R le rayon de courbure de la surface par laquelle pénètrent les rayons *incidents* ;

R' le rayon de courbure de la face opposée; ces rayons R R' étant infinis $= \infty = \frac{1}{0}$ lorsque les faces sont planes.

N l'indice de réfraction de la lentille; N = environ 1.5 pour l'air et le verre.

On a pour toutes les lentilles :

$$f = \frac{R R'}{(N-1)(R'-R)} \qquad (a)$$

Cette formule donnera la distance focale, et le signe que rendra f indiquera dans quel sens il faut compter cette distance.

Introduisant f *avec son signe* dans

$$\frac{1}{I} = \frac{1}{f} + \frac{1}{D} \qquad (b)$$

n en déduira les rapports de distance et de direction de image et de l'objet.

Ces formules montrent immédiatement que pour des rayons cidents parallèles,

1° Les trois lentilles à bords tranchants ont des distances ocales *négatives* ; ces trois lentilles augmentent donc la onvergence des rayons ; elles sont *convergentes*.

2° Les trois lentilles à bords épais ont des distances focales *ositives*, diminuent la convergence, sont *divergentes*.

L'effet général des lentilles est donc de dévier les rayons cidents parallèles du côté de leur plus grande épaisseur.

Lentilles biconvexes. — Si l'on fait l'application de la

(*b*) aux lentilles biconvexes, dont la distance
...jours *négative*, on a :

$$\frac{1}{i} = -\frac{1}{f} + \frac{1}{D}$$

...ur $D = \infty$; on trouve. . . . . $-i = f$

$D = 100\,f$. . . . . $-i = \frac{100}{99}f$

$D = 2\,f$. . . . . $-i = 2\,f$

$D = f$. . . . . $-i = \infty$

$D = \frac{f}{2}$. . . . . $+i = f$

L'image est du côté opposé à l'objet dans les quat...
miers cas ; mais, dans le cinquième, elle est *virtuell...*
avant du verre.

On voit encore que, en général, les effets produit...
lentilles biconvexes sont les suivants :

La distance de l'objet étant comprise entre l'in...
longueur égale à la distance focale, les rayons réf...
vergent en un point variable quant à la distance
jours situé du côté opposé à l'objet.

La distance de l'objet étant égale à celle d...
focale, les rayons réfractés sortent en arrière ...
parallèlement à l'axe.

Enfin, la distance de l'objet étant moindre
focale, les rayons sortent du côté de leur in...
vergeant de ce côté.

CHAPITRE XI.

Levés de Terrains.

1. Nous limitons ce précis aux seules c...
saires pour lever avec exactitude les pl...
de terrains sur lesquelles des ingénieur...

puissent avoir à opérer, laissant ainsi de côté toutes les théories ou formules de la *haute géodésie*, pour lesquelles nous renverrons en partie aux mots *Coordonnées géographiques*, p. 380, *Angle horaire*, p. 41, et autres, de notre *Aide-mémoire des Ingénieurs*.

2. *Plan d'un terrain.*—S'il était possible de suspendre un fil à plomb à chacun des points de la surface ondulée d'un terrain, puis de marquer sur un plan inférieur, tangent au prolongement du niveau des mers au-dessous du milieu du terrain, les pieds de chacune des verticales, ce plan tangent serait le *plan* proprement dit du terrain supérieur, et cette expression s'applique encore à l'image réduite que l'on en trace sur le papier à l'échelle convenable.

3. *Faire le levé* d'un pays, c'est donc chercher les éléments de la projection *horizontale* des divers points ABCDEF... de son relief (fig. 31).

4. Pour les obtenir successivement, on ne s'attache d'abord qu'aux points les plus saillants. On les suppose liés entre eux, *trois à trois*, par des droites qui forment ainsi un *réseau* continu de triangles situés dans des plans ordinairement différents les uns des autres, réseau qui recouvre ainsi toute la contrée.

Cela fait, on mesure directement l'un des côtés AB de ce réseau (fig. 31), puis les angles formés aux extrémités A, B, de cette base avec tous les sommets B, E, F... que l'on pourra apercevoir de ces extrémités. On mesure également toutes les inclinaisons des côtés sur l'horizon, *tous* les angles que ces côtés forment entre eux, deux à deux, dans l'espace. On réduit ces derniers angles à la valeur qu'ils auraient si leurs sommets et leurs côtés étaient projetés sur l'horizon ; on réduit la base AB à la longueur de sa projection sur le même plan ; on a alors les éléments nécessaires pour calculer de proche en proche tous les éléments de la projection du polyèdre ABED...F.

Ainsi (accentuant toutes les lettres pour indiquer la projection horizontale des points respectifs qu'elles rep

tent), la connaissance de la longueur A' B' et des angles B', A', E', détermineront les autres éléments du triangle A'B'E', projection horizontale du triangle A B E, et B'E' en particulier. De cette longueur B'E' et des angles connus B', E', D', on conclura de la même manière B'D' et D'E'; la première permettra de calculer le triangle B'D'C'; la seconde, celui D'F'E', et ainsi de suite.

5. *Pour vérifier* l'exactitude de ces opérations, il sera souvent nécessaire de mesurer directement une seconde *base*, B C par exemple, et de comparer sa longueur réduite B' C', qui devra être, ou rigoureusement ou très-à peu près égale à celle B' C' que l'on aura obtenue par le calcul du triangle B'D'C'.

6. L'opération totale que l'on aura ainsi achevée est la *triangulation* du terrain, et le résultat qu'on en a obtenu est le *canevas* du plan.

7. On conçoit facilement comment, en s'appuyant sur les lignes de ce *canevas*, on parviendra à déterminer, par des opérations analogues, les projections *a' e' f'* de points secondaires *a e f*; — comment ensuite les lignes *a' e'*, E' *f'*, pourraient, à leur tour, fournir les positions de points encore moins importants, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on ait sur le plan des triangles assez petits pour que l'on n'ait plus à faire dans leur intérieur que ce qu'on appelle un *levé de détail*.

8. Une seule triangulation suffira, le plus souvent, avant de passer à ces derniers levés, et la méthode suivante pourra alors être employée pour déterminer la position des points principaux du détail de chaque triangle. Cette méthode pourrait même servir pour former un *canevas* si le terrain n'avait pas une grande étendue, ou si une très-grande exactitude n'était pas exigée.

9. De l'extrémité A d'un côté ou d'une base AB (fig. 32), on relèvera tous les angles compris entre son autre extrémité B et les points C, D, E, F, G...; on se transportera ensuite en B, et, de cette station, on relèvera les angles compris entre A et les mêmes points C, D, E, F, G. — En même temps

que, de A et de B, on aura relevé les angles de direction, on aura pris les inclinaisons à l'horizon de tous les côtés AF, BF, AG, BG, AC, BC, etc. On aura ainsi une série de triangles tous appuyés sur la même base, dans lesquels on connaîtra un côté et les deux angles adjacents, ce qui permettra de les calculer, de les construire, et, par conséquent, de placer sur le plan les projections des points CDEFG. La base AB devra d'abord être réduite à l'horizon, et les angles de direction y seront également réduits par le calcul, si l'INSTRUMENT qui les a fournis n'a pas, de lui-même, opéré ces réductions (*).

10. Entrons maintenant dans le détail de chacune des opérations sommairement indiquées ci-dessus, après avoir pris une idée générale de la méthode.

11. La première opération d'un ingénieur chargé d'un levé de quelque étendue sera la *reconnaissance* générale des points saillants du terrain, dont il fera en même temps un *croquis*. Si ces points saillants sont en grand nombre, il choisira de préférence, pour en faire les sommets de ses triangles : 1° ceux qui formeront entre eux les plus grands triangles possibles; 2° ceux qui formeront les triangles qui se rapprocheront le plus de la forme équilatérale; 3° il rejettera prudemment ceux qui donneraient des triangles tels que de chacun des sommets on ne distinguerait pas nettement les deux autres et s'opposeraient ainsi à ce qu'il pût vérifier si la somme de leurs trois angles $= 180°$. Il fera placer des signaux à chacun des points qu'il aura choisis, à moins qu'il ne s'y trouve déjà des signaux naturels, et il procédera à la mesure d'une base.

12. *Mesure d'une base.* — Cette base est nécessairement l'un des côtés des triangles de son canevas. Il la choisira sur le terrain le moins inégal, s'inquiétant peu qu'il soit hori-

(*) On trouvera dans mon *Aide-mémoire des ingénieurs* un article très-détaillé sur les instruments, sur les moyens de les vérifier et de les régler, etc.

zontal ou non, pourvu que, dans ce dernier cas, sa pente soit sensiblement uniforme. Les grandes routes, les bords de la mer, ceux des rivières ou des cours d'eau, ceux des marais offrent le plus souvent des emplacements convenables. Il tracera, à l'aide de jalons, la direction de cette base qui devra toujours être la plus longue possible; puis il la mesurera à la CHAINE, deux fois au moins, avec le plus grand soin et suivant sa pente. Il relèvera ensuite son inclinaison α à l'horizon, et si L est la longueur trouvée, sa projection horizontale x sera :

$$x = L \cos. \alpha.$$

Mais l'angle α étant ordinairement fort petit, il vaut mieux calculer x par la relation :

$$x = L\,(1 - 2 \sin.^2 \tfrac{1}{2} \alpha).$$

Lorsque le pays est excessivement accidenté et que le levé a peu d'étendue, on peut se permettre de mesurer les bases à la *stadia*.

13. La base mesurée, il procédera au relèvement des angles. Si l'INSTRUMENT qu'il emploie ne donne pas l'angle des plans verticaux passant par les deux signaux A, B et la station C (fig. 33), il appliquera à cet angle ACB le calcul dit : *Réduction des angles à l'horizon*; c'est-à-dire que de l'observation directe de l'angle BCA et des angles de hauteur BCE, ACF, il déduira l'angle réduit à l'horizon ECF, remarquant que le mot réduit n'implique pas ici une idée de diminution. Soient donc :

O = l'angle observé BCA dans le plan des signaux et de la station;

α, β les angles de hauteur des signaux respectifs A, B, au-dessus de l'horizon ECF;

z, z' leurs distances zénithales respectives; $z = (90 - \alpha)$; $z' = (90 - \beta)$;

O' = l'angle réduit ECF qui est le même que celui O' du triangle sphérique ABO'.

On a (*Géom.*, 0, 20) :

$$\sin. \frac{1}{2} 0' = \sqrt{\frac{\sin.\left(\frac{0+z+z'}{2}-z\right)\sin.\left(\frac{0+z+z'}{2}-z'\right)}{\sin. z \sin. z'}}$$

Application.

Soit $0 =$ . . . . 58° 54′ 40″
$\alpha = 12° 22' 30''$ d'où $z =$ . . 77° 37′ 30″
$\beta = 13° 8' 24''$ d'où $z' =$ . . 76° 51′ 36″

On a : $\frac{0+z+z'}{2} =$ . . . . 106° 41′ 53″

$\frac{0+z+z'}{2} - z =$ . . . . . 29° 4′ 23″

$\frac{0+z+z'}{2} - z' =$ . . . . . 29° 50′ 17″

log. sin. 29° 4′ 23″.	9.6865687
log. sin. 29° 50′ 17″.	9.6968369
comp. log. sin. 77° 37′ 30″.	0.0102095
comp. log. sin. 76° 51′ 36″. . . .	0.0115225
	19.4051376

dont la moitié = log. sin. $^1/_2$ 0′ = . . . 9.7025688
ce qui donne 30° 16′ 32″ pour la valeur de $^1/_2$ 0′
et enfin 60° 33′ 4″ pour l'angle *réduit* 0′

Lorsque l'ingénieur opérera en pays de plaine, il pourra le plus souvent s'épargner le calcul ci-dessus, il n'en sera pas de même en pays de montagnes.

On remarque que lorsqu'on a sensiblement $\alpha = \beta$, d'où $z = z'$, la formule se simplifie beaucoup, et devient

$$\sin. {}^1/_2\, 0' = \frac{\sin. {}^1/_2\, 0}{\sin. z} = \frac{\sin. {}^1/_2\, 0}{\cos. \alpha}$$

14. Les points qu'on a choisis comme signaux aux sommets des triangles sont souvent tels qu'on ne peut s'y placer commodément. Les tours, les clochers, la plupart embarrassés de charpentes, sont dans ce cas, soit parce que leur centre est occupé par une poutre verticale, par un poinçon, soit parce que leurs ouvertures ne sont pas disposées de manière à ce que, de leur centre, on puisse viser aux deux autres sommets du triangle. On se place alors en dehors du sommet mathématique, et les angles qu'on relève de cette fausse station doivent subir une correction qui les ramène à la valeur qu'ils auraient eue si on les avait observés du vrai sommet. C'est l'objet de la réduction suivante :

Réduction au centre de la station (fig. 34). Soient C la station qu'aurait dû occuper l'observateur pour y relever l'angle $BCA=C$; C' celle que les obstacles le forcèrent d'adopter, et d'où il relève l'angle $BC'A=C'$.

$CC'=r$ les distances des deux stations.
$g =$ la distance de l'objet de gauche au sommet C.
$d =$ distance de l'objet de droite au même sommet.
$y =$ l'angle au sommet C' entre l'objet de gauche et le sommet vrai C.
$C'+y =$ angle au sommet C' entre l'objet de droite et le sommet vrai C.
R ce qu'il faut ajouter ou ôter à l'angle C' pour avoir C.

On a :

$$C = AIB - CBC' = C' + CAC' - CBC'$$

$$\sin. CAC' = \frac{r \sin. (C'+y)}{d}; \quad \sin. CBC' = \frac{r \sin. y}{g}$$

et les angles CAC' et CBC' étant toujours fort petits, on pourra prendre la valeur de leurs sinus pour celle de leurs arcs, ce qui donnera

$$C - C' = R = \frac{r \sin. (C'+y)}{d} - \frac{r \sin. y}{g}.$$

les deux termes du second membre n'expriment que
ngueurs d'arc pour lesquelles le rayon 1 est l'unité de
. On aura leurs graduations *en secondes*, en les divi-
ar la longueur de 1" qui se confond sensiblement
elle de sin. 1". Donc, on emploiera définitivement la
e de réduction :

$$y = \text{R secondes} = \frac{r \sin.(C'+y)}{\sin.1''.\ d} - \frac{r \sin.y}{\sin.1''.\ g}$$

nt faire attention aux signes. On voit que le premier
leviendrait négatif, par exemple, si $C'+y$ était $>180°$,
econd deviendrait positif si y était lui-même $>180°$.
; de connaître d et g à $^1/_{100}$ près pour calculer R, et
marque que si les objets A et B sont des astres dont
ances puissent être considérées comme infinies, la
ion R devient nulle. d et g s'obtiennent d'ailleurs ap-
atívement en calculant d'abord le triangle comme si
ervations avaient été faites du centre des stations.

Application.

ant $d = 4510^m$ $g = 4730^m$ $r = 3^m.96$
$C' = 33° \ 58' \ 37''.43$ $y = 232° \ 55' \ 0''$
$C' + y = 266° \ 53' \ 37''.43$

1er terme.		2e terme.	
. . . .	0.5976952		
log. sin. 1".	5.3144251		
	5.9121203	. . . .	5.9121203
n. (C' + y).	9.9993612	log. sin. y . . .	9.9018719
log. 4510.	6.3458235	comp. log. g . . .	6.3251389
r terme. . .	2.2573050	log. 2e terme. . .	2.1391311
me étant négatif, on a :		Ce terme étant positif, on a :	
terme = — 180".84		2e terme = + 137".76	

d'où $$R'' = -180''.84 + 137''.76 = -43''.08$$

et $$C - C' = -43''.08$$

$$C = C' - 43''.08 = 33^\circ\ 57'\ 54''.35$$

Cet angle C devra être ensuite réduit à l'horizon, s'il
lieu.

15. La longueur de ces calculs, les difficultés que
éprouve à mesurer r et y, l'obligation de calculer les
stances d et g pour introduire leurs valeurs dans la for
engageront peut-être l'ingénieur à prendre pour règle g
rale d'employer des signaux mobiles, des perches bien é
tes, par exemple, et d'éviter de choisir pour sommets d
triangles les flèches de clochers, les paratonnerres, le
rouettes, lorsque, toutefois, l'on ne croira pas devoir
ployer la méthode d'*intersection* (9).

16. *Calcul des triangles.* — Lorsque les trois angl
chaque triangle auront été réduits au centre de la stati
à l'horizon, on en fera la somme S que l'on comparera à
puis la valeur A, B, C de chaque angle sera corrigée d
de l'excès de leur somme sur deux angles droits, ce q
nera les angles *moyens* A', B', C' correspondants. Ce s
derniers angles qui serviront au calcul des triangles
leur construction sur le papier, et c'est la *base* réd
qui servira à calculer le premier triangle. On n
mettre un ordre trop sévère dans la disposition d
et les données de la *mise au net*. On dispose ordi
celles-ci dans les colonnes suivantes :

NOMS des signaux.	ANGLES		CÔTÉS opposés.
	observés.	corrigés.	

apporter sur le papier les triangles réduits, est
ıant une opération graphique qui n'exige plus que la
ı du problème : *construire des triangles dont on*
t les trois côtés (*Géom.*, P, 24). Cette méthode s'em-
souvent; mais, comme la position de chaque point dé-
ainsi de celles des deux points précédents, il en résulte
e erreur sur ces dernières cause ordinairement une
elle erreur, et que, de triangles en triangles, ces erreurs
'accumulent que trop souvent et altèrent sensiblement
raie position des derniers points. On évite cet inconvé-
ıt grave, en employant la méthode fondamentale de la
métrie des *courbes*, qui consiste à fixer la position des
ıts par les distances de chacun d'eux à deux droites per-
ıdiculaires entre elles. Toutefois, il était naturel de choisir
i pour axes des coordonnées la MÉRIDIENNE du point prin-
pal du plan et la perpendiculaire à cette méridienne; c'est
e qu'on fait ordinairement par la méthode ci-dessous indi-
uée.

18. *Rapporter la position des points du canevas à une méridienne et à sa perpendiculaire* (fig. 35). Les directions de la MÉRIDIENNE NAM et de la perpendiculaire OAP au point principal A du levé étant déterminées, le côté AB est orienté, c'est-à-dire que l'on connaît l'AZIMUT MAB $= a$ de ce côté. Il ne s'agit plus que d'en déduire les coordonnées à (A*b*, A*b'*), (A*c*, A*c'*)... (A*k*, A*k'*) (A*i*, A*i'*) de tous les autres sommets. Pour y parvenir, on transportera successivement l'origine des coordonnées à tous les sommets des triangles, c'est-à-dire que l'on mènera par tous ces sommets des parallèles à la méridienne et à sa perpendiculaire, et les côtés des triangles, dont la longueur est connue d'ailleurs, deviendront les hypothénuses des triangles rectangles dont on sait calculer les autres côtés (*Géom.*, N, 2). Par exemple, on aura pour B les relations

$$\text{A}b = \text{AB}\cos.a \;.\;.\;.\;.\;.\;.\quad \text{A}b' = \text{AB}\sin.a$$

Pour calculer les distances relatives au sommet C, on r marquera que l'angle BAC étant connu, on a :

$$CAM = a - BAC \text{ et } Ac = AC \cos.(a - BAC);$$
$$Ac' = AC \sin.(a - BAC);$$

retranchant CAM de CAE, on aura MAE, d'où $Ae = AE \cos. MAE$; $Ae' = AE \sin. MAE$.

Pour le point D, on voit facilement que l'azimut

$$DCM_1 = CAM + 180° - DCA = \alpha;$$

on en conclut $cd = CD \cos. \alpha$; $c'd' = CD \sin. \alpha$ et dès lors pour les ordonnées du point D

$$Ad = Ac + cd; \quad Ad' = Ac' + c'd'$$

et ainsi de suite.

Il convient d'adopter ici une méthode analogue à cell la géométrie des courbes et, par exemple, de faire to deux positives les ordonnées x et y des points situés dan région *sud-ouest* MAO ; l'on a alors, x étant la distan la méridienne, et y celle à sa perpendiculaire :

Région sud-ouest	MAO.	......	$+x+y$
Région nord-ouest	OAN.	......	$+x-y$
Région nord-est	NAP.	......	$-x-y$
Région sud-est	PAM.	......	$-x+y$

Partant de cette convention, désignant par k un côté con par z son azimut ou l'angle d'inclinaison de sa direction la direction parallèle à la méridienne, angle compté com a en tournant du sud vers l'ouest depuis zéro jusqu'à 3 on aura généralement

$$x = k \sin. z \pm m; \quad y = k \cos. z \pm p$$

m et p étant les ordonnées de l'extrémité de k. Donnant sinus et cosinus les signes qui leur conviennent, x et y pr dront d'elles-mêmes les signes qui indiqueront à quelle

gion le sommet appartient. Ces calculs, fort simples, exigent cependant beaucoup d'ordre et d'attention.

19. *Levés de détail.* — La triangulation faite ou rapportée sur le papier, on commence le levé des détails. Les moyens qu'on peut employer pour les obtenir varient avec la nature des INSTRUMENTS dont on dispose. Nous les classerons sous les titres, *levés à la planchette*, levés à la *boussole*, levés au *graphomètre*, ou à *l'équerre*.

20. *Levés à la planchette, généralités.* — *La planchette* doit toujours être disposée horizontalement à chaque station; les angles qu'on y trace sont toujours ainsi réduits à l'horizon (13), aussi bien que les droites qui joignent entre eux les différents points du plan. Les distances mesurées directement devront être prises avec la *chaîne* tendue *horizontalement* et jamais suivant la pente du terrain. On concevra du reste et l'on se rappellera plus facilement l'usage de la planchette, en remarquant que toutes les situations qu'elle prend aux stations successives sont parallèles entre elles, et que l'instrument est toujours placé dans le même sens relativement au terrain.

21. *Première méthode dite de cheminement* (fig. 36). — Elle s'applique lorsque tous les points A, B, C, D, E du terrain sont accessibles, lorsqu'on peut y placer la planchette, et lorsque aucun obstacle ne s'oppose à ce que l'on *chaîne* de l'un à l'autre.

Etablissez la planchette bien horizontalement au-dessus du point A du terrain, à l'aide d'un petit niveau à bulle d'air; — disposez-la de manièré que sa surface puisse contenir tout le terrain ABCDEF; — enfoncez perpendiculairement au plan de la tablette au point *a* du papier déterminé par la verticale en A au terrain, une fine aiguille à laquelle vous aurez fait une forte tête avec de la cire à cacheter; — appliquez contre cette aiguille le bord de l'alidade qui répond aux pinnules; — faites tourner l'alidade autour de l'aiguille *a* jusqu'à ce que vous aperceviez le *pied* du jalon ou du signal

placé en B ; — tirez alors le long de l'alidade un *définie ;* — tracez de la même manière une autr définie suivant la direction AF, en visant au pied — enlevez la planchette du point A, et faites p lon en ce point du terrain.

Transportez-vous au point B du terrain, et, temps, faites chaîner la ligne AB du terrain, le neurs s'alignant réciproquement sur les jalons A sur les lignes indéfinies tirées de *r*, et à partir du papier, portez à l'échelle adoptée les longu de AB, AF.

Piquez une seconde aiguille au point *b* de la — établissez l'instrument au point B du terrain, que *b* se trouve ou rigoureusement, ou sensibl verticale de B. Une petite erreur sur cette posit n'aurait d'influence que si l'on opérait à une échelle ; en pareil cas, on ferait convenir ces de employant un compas d'épaisseur, dont les point atteindre le centre de la planchette. A l'une suspendu un fil à plomb, l'autre s'appliquerait s puis l'on disposerait la planchette de manièr plomb passât par la verticale de B. Revenons à

Appliquez l'alidade contre les aiguilles *b*, *a* ;- ner alors la planchette jusqu'à ce que, à travers vous aperceviez le pied du jalon A. Dans cette du plan se trouvera dans la direction BA du rien changer à la position de la planchette, enle faites mouvoir l'alidade autour de l'aiguille que, à travers les pinnules, vous aperceviez le Tirez alors le long de l'alidade une droite ind direction *b* C ; — faites chaîner B C ; — porte sur le plan, réduite à l'échelle adoptée, et guille enlevée de *a* ; — transportez la plar terrain ; — opérez en C absolument de mê opéré en B ; — continuez ainsi de suite ju ayez fermé le polygone.

La méthode de cheminement s'applique avec avantage au levé des bois fourrés, des sentiers, des ruisseaux.

22. *Vérifications.* — On peut remarquer que, dès que l'on est arrivé au point C, les points *a b* étant déjà fixés sur la planchette, il faut, si l'on a bien opéré que, lorsque *c b* est tracée, la direction CA de la diagonale du terrain coïncide avec *ca* du plan. S'il n'en est pas ainsi, on s'est évidemment trompé ou sur la mesure de AB, ou sur celle de BC, ou sur leurs réductions *a b*, *b c* ou enfin sur l'angle ABC = *a b c*. On fera des vérifications semblables à chaque station, et l'on voit, par exemple, que la planchette étant placée en D, et la droite *d c* du plan étant tracée, les directions *d a*, *d b* du plan doivent être les mêmes que celles DA, DB du terrain. S'il n'en est pas ainsi, des erreurs ont été commises, et on doit les corriger immédiatement.

23. *Si l'on fait usage du déclinatoire*, comme on a tracé sur la planchette la ligne nord-sud au point de départ A, on est dispensé de la station en B; l'on se porte de A directement en C, tandis que l'on fait mesurer AB et BC. On oriente la planchette en C, à l'aide du déclinatoire ; — puis *a b* étant porté sur la planchette à l'échelle convenue, on pique une aiguille en *b*, et faisant tourner l'alidade autour de ce point jusqu'à ce que de la station C, on aperçoive le jalon B à travers les pinnules, on tirera une indéfinie *b*.. C, sur laquelle on portera de *b* en *c* la longueur réduite *b c*. De la même situation C, on tirera immédiatement une indéfinie *c*D vers D, puis laissant de côté la station D, on se portera immédiatement en E, tandis qu'on fera chaîner CD et DE; on portera *cd* à l'échelle sur la direction *c*D, puis de la station E, visant à D à travers les pinnules de l'alidade appuyée contre l'aiguille *d*, on tirera l'indéfinie *d*E sur laquelle on portera la longueur *de*, puis du point *e*, on tirera l'indéfinie *e*F, et ainsi de suite.

L'emploi du déclinatoire réduit ainsi de près de moi- nombre des stations, mais le vent [illegible] empêche quel

l'aiguille de se fixer aisément, fait que, alors, il n'y a
économie de temps.

24. *Méthode dite de recoupement.* — Elle perm
faire mesurer qu'une seule distance, et elle n'a d'ap
que lorsque tous les points sont accessibles.

Soit (fig. 37) AB la base que l'on a pu mesurer;
cera sur la planchette une droite *ab*, réduction
l'échelle adoptée, et située convenablement. — On
la planchette en B, et l'on fera convenir le point *b* de
chette avec B du terrain, et la direction *ba* avec B
tirera en visant de *b* au jalon C une droite indéfinie
direction *b*C; — on portera la planchette au poi
terrain, et on l'y disposera de manière que la
droite *bc* convienne avec BC quant à la direction;
quera une aiguille au point *a* du plan; — on fera
l'alidade autour de cette aiguille jusqu'à ce que, d
tion C, on aperçoive le jalon A du terrain à travers
nules; — l'alidade restant dans cette position, on ti
vers soi une droite indéfinie, qui recoupera nécess
la direction *bc* en un point qui sera *c* du plan.

La planchette restant dans cette position, on ti
vers le jalon D une indéfinie *c*D, et l'on se transp
D; — on y disposera la planchette de manière que
tion de D*c* convienne avec celle de DC. Plaçant en
dade contre l'aiguille *a* du plan, on la fera tourn
de cette aiguille, jusqu'à ce qu'on aperçoive par les
le pied du jalon A du terrain. Tirant alors de *a* ve
indéfinie, elle recoupera la direction *c*D en un poin
nécessairement *d* du plan.

De ce point *d* du plan, on dirigera l'alidade vers l
du terrain, on tirera l'indéfinie *d*E; — on transp
planchette au point E; — on fera convenir les direc
ED, puis, sans changer la position de la planchette
cera l'alidade contre l'aiguille *a*, on la fera tourne
ce que l'on aperçoive à travers les pinnules le pied du

— enfin on tirera vers soi une indéfinie, qui recoupera celle dE en un point qui sera nécessairement e du plan ; — et le polygone sera fermé.

25. *Vérification.* — On se vérifie à chaque station, en se servant des points déjà déterminés, et l'on voit facilement, par exemple, que le point e déterminé sur le plan où l'on a déjà a, b, c, d, peut être donné à la fois en tirant des droites, soit suivant A a pour recouper d E, soit suivant B b pour recouper la même indéfinie d E, soit encore suivant C c.

26. *Si l'on emploie le déclinatoire,* la base AB étant représentée par ab à l'échelle sur la planchette orientée, on va s'orienter de nouveau en C, puis à l'aide de l'aiguille (en cuivre) piquée d'abord en a du plan, on fait tourner l'alidade jusqu'à ce qu'on aperçoive le jalon A du terrain, et l'on tire l'indéfinie A a C vers soi. Opérant de même, de la même station et par rapport à B du terrain, on a une autre indéfinie Bb qui recoupe la direction AaC en un point qui est nécessairement c du plan. Avant de quitter la station C, on tire c D, puis on se porte en D du terrain, on s'y oriente, et les points A, B de la base et a, b du plan servent encore à déterminer d absolument comme on a obtenu c... et ainsi de suite, en remarquant que (B, C) (C, D) (b, e) (c, d) peuvent donner de même la position des points e... f du plan.

27. *Méthode d'intersection.* — Elle s'emploie surtout lorsque la base AB seulement est accessible, et elle ne diffère point, quant au principe, de celle indiquée (9) et fig. 32. Ainsi on dépose la planchette à l'une des extrémités A de la base AB ; — on trace à l'échelle convenue cette même base $a\,b$ sur le plan, puis après avoir disposé l'instrument de manière que ab soit exactement dans la direction AB, on pique l'aiguille en a et faisant tourner l'alidade autour de cette aiguille, on vise successivement à tous les points F, G, C, E, D du terrain, et l'on tire sur la planchette des droites indéfinies dans leurs directions ; — on transporte ensuite la planchette en B, on la dispose de manière que b étant dans

la verticale de B, la base réduite *ba* soit dans la direction BA, puis visant de B en faisant tourner l'alidade autour de l'aiguille *b*, on tire d'autres indéfinies vers les mêmes points du terrain que précédemment. Ces indéfinies recoupent les premières sur la planchette en des points *f, g, c, e, d* qui sont les projections des points F, G, C, E, D du terrain.

La méthode d'intersection a l'avantage d'être rapide et l'inconvénient de donner parfois des intersections trop aiguës ou trop obtuses; ce qui fait que l'on saisit mal le véritable lieu des points à marquer sur la planchette.

28. *Vérification.* — La planchette étant à l'une des extrémités B de la base, et *ba* du plan convenant avec BA du terrain, on fera placer un jalon en un point quelconque V du terrain, et l'on tirera l'indéfinie *b*V. On transportera la planchette en V; — on fera convenir l'indéfinie V*b* avec VB; — on piquera une aiguille à un point *g*, par exemple, du plan. Autour de cette aiguille *g*, on fera tourner l'alidade, et lorsqu'on apercevra par les pinnules le point G du terrain, on tirera l'indéfinie G*g* qui recoupera *b*V en un point qui sera *v* du plan. Tout restant dans cette situation, il faut, si l'on a bien opéré, que plaçant successivement l'alidade suivant *vf*, *vc*, *va*. . . du plan, on aperçoive à travers les pinnules les points F, C, A du terrain.

29. *L'emploi du déclinatoire* n'offrirait ici d'autre avantage que celui d'orienter la base par rapport au méridien magnétique. Toutefois la planchette orientée à l'aide du déclinatoire, permet de résoudre un problème très-usuel, savoir :

30. *Déterminer sur la planchette la position d'un point intérieur* O *du polygone* ABCD, trois points *a*, *b*, *c*, ou deux points au moins *a*, *b*, étant déjà placés sur le plan et visibles du point O (fig. 38).

On orientera la planchette à la station O, puis faisant tourner l'alidade autour de l'aiguille *a* jusqu'à ce qu'on aperçoive A du terrain, on tirera une indéfinie dans la direction A*a*; — on fera de même relativement à B, et l'intersection

la planchette des deux indéfinies A a, B b donnerait sur plan la position o de O, mais il convient de vérifier cette sition en opérant encore de même sur c et C ou tout tre *troisième* point.

31. *Application de cette méthode* (fig. 59). — On voit immédiatement comment à l'aide d'une base AB convenablement située, on obtiendrait, en stationnant successivement q, m, p.... les positions de ces points sur la planchette, par suite toutes les sinuosités d'un cours d'eau.

Les lignes am, ap... serviraient à leur tour de bases pour lacer sur la planchette, à l'aide de la méthode d'intersec- (27), des points tels que z situés sur l'autre rive, et l'on btiendrait ainsi facilement la largeur du cours d'eau en férents points, ainsi que la figure des deux rives.

Il faut du reste éviter ici, comme à la méthode (27), les tersections trop aiguës ou trop obtuses.

32. On obtiendrait encore facilement les sinuosités des ruisseaux, des haies, etc., avec la planchette sans déclinatoire, abaissant (fig. 59) des coudes ou des points principaux , y, z, u, t de petites perpendiculaires sur des droites, mme E C par exemple, déjà tracées sur le plan. On porte l'échelle les distances de leurs pieds le long de ec, ainsi ue leurs longueurs réduites, et l'on trace ensuite facilement s courbes C $uzyx$. On dessine en même temps à vue le rrain compris dans les divers trapèzes E xy Y.

33. C'est en employant avec sagacité tantôt l'une tantôt autre des méthodes précédentes que l'on parvient à représenter sur la planchette le *plan* d'un terrain avec la projecon de tous les détails. La planchette a le grand avantage e dispenser l'ingénieur de tout registre d'observations et d ous croquis. Elle donne immédiatement une représentati ffisamment fidèle des petites ...ndues de terrain, mais éthodes purement graphiques ...ui constituent son empl uraient indiquer que très-gr...ement la valeur des celle des lignes qui n'ont ... directement m

36. *Tracer à la planchette une route, en forêt.* blème suppose que l'on a sur la planchette le pl la partie de forêt dans laquelle on doit opérer, direction de la percée à y faire.

On disposera la planchette à l'origine de la tr sant rigoureusement convenir *deux* des plus gra de la planchette avec leurs correspondantes du placera alors l'alidade avec soin sur l'axe de projet marqué sur la planchette, et l'on fera ou dans cette direction que l'on marquera d'ailleurs quets, à mesure que cela deviendra possible.

37. *Usage de la planchette pour tracer un p terrain.* — On conçoit très-facilement comment, un projet étant tracé sur la planchette, on rep terrain toutes les lignes homologues, voici toutefo prescriptions utiles :

Il faut d'abord disposer la planchette sur le t des points *principaux* du plan, et faire conver *grande* ligne qui parte de ce point avec celle qui respondre sur le terrain. On détermine ensuite de mière station, à l'aide de l'alidade, autant d'align le terrain qu'il y a de lignes droites qui peuvent y — On fait porter sur ces alignements autant de fractions de mètre que l'échelle ou les cotes en On va ensuite établir la planchette à chacune des de ces premiers rayons, et après leur avoir donn tion parfaitement parallèle à celle qu'elle avait à station, on détermine de nouveaux alignements mite la longueur à celle indiquée sur le plan.

Il importe presque toujours ici que le point chette se trouve rigoureusement dans la verticale d logue sur le terrain, on obtiendra cette coïncide moyens indiqués, § 21.

Il convient enfin que les principales lignes du cotées d'avance sur la planchette ainsi que les di

ne du projet. On procède ordinairement des contours intérieur, mais il est quelquefois plus commode de de grands axes.

Levés à la boussole; généralités. — L'angle formé par irection quelconque avec celle de l'aiguille aimantée, surera par la *droite* de l'observateur, et depuis zéro 'à 360, en d'autres termes, il a pour mesure l'arc compris la *droite* du rayon visuel et la *gauche* de l'extrémité de l'aiguille. Il faut ne lire ces angles sur le limbe que ie l'aiguille a cessé d'osciller, et, pour ne point come de trop grosses erreurs sur cette lecture, l'observateur a faire en se plaçant juste en face de l'extrémité de ille. — La boussole doit d'ailleurs être toujours dishorizontalement.

vent, le fer, à la surface du sol, les oxydes magnétiques, urants électriques, les voies de roulage en fer dans les souterrains, sont des causes d'erreurs graves qui oblidans maintes circonstances à s'abstenir de l'emploi de ussole.

Première méthode, applicable aux levés des poly- dont tous les points sont accessibles, aux cours d'eau, inuosités des chemins, aux contours des petites pro- s (fig. 40).

t ABCDE le polygone. — Etablissez horizontalement ussole au point A, et pendant que les chaîneurs mesula distance entre le point A et le jalon B, visez de A B; tracez un arc sur le croquis, autour du point *a* depuis oite de la direction AB jusqu'à la gauche de la petite qui figure l'aiguille; — inscrivez autour de cet arc la ation observée de cet angle, et portez en même temps croquis, le long de *ab*, la valeur en mètres et fractions être de la distance AB mesurée horizontalement. Avant itter A, visez vers E, et prenez note de la valeur de le *n* AE; — transportez la boussole en B et BC ce que avez fait pour A et AB; — transportez l'instrument en

C. . . . . . et ainsi de suite jusqu'au dernier angle et a nier côté du polygone.

40. *La vérification de la valeur des angles* est fond la propriété des polygones. Pour avoir la valeur de l *intérieur* B par exemple, on peut remarquer que les tions de l'aiguille étant sensiblement parallèles à tou positions du plan, on a (*Géom.*, A, 17) :

$$B = sBA + sBC = 360 - nAB + CBn - 180°$$
$$= 466° - 325° = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 14$$

On aurait de même, en continuant à ne faire entrer dans les calculs des angles *intérieurs* que les valeurs des angles *observés :*

$$C = nCD - CBn + 180° = \ldots\ldots\ldots 5$$
$$D = nDE - nCD + 180° = \ldots\ldots\ldots 27$$
$$E = nEA - nDE + 180° = \ldots\ldots\ldots 2$$
$$A = nAB - nEA - 180° = \ldots\ldots\ldots 4$$

ainsi la somme des angles intérieurs est bien égale 180 (5 — 2) ou. 54

On n'aura pas manqué de remarquer que, dans ces c l'angle nAB est l'angle *observé* et $= 325°$ et non pas aigu nAB de la figure ; il en est de même de tous les

41. *La vérification des côtés* se fait en construis polygone à l'échelle à l'aide du rapporteur ou de la ta sinus (*Géom.*, P, 9). Il n'y a point d'erreur, ou il y compensations d'erreur, si le polygone *se ferme* exact c'est-à-dire si le dernier côté EA passe par le point part A, et si tous les autres côtés ont d'ailleurs la lo voulue par l'échelle. Cette construction du polygone facilement en tirant sur le papier un grand nombre rallèles équidistantes ou non qui représentent les dir de l'aiguille aimantée. Elles servent à déterminer la p du rapporteur aux divers point du plan. L'emploi du *quadrillé* est encore plus commode, et le rapporteur

de beaucoup préférable ici à celui qui ne comprend qu'une
ni-circonférence.

12. *Observation.* — De même qu'avec la planchette orien- (23) on peut se dispenser de faire des stations à tous les nmets du polygone (fig. 40) : on voit, par exemple que, tant du point A, on peut aller stationner directement en pourvu que, de ce point, on relève cette fois l'angle BC*n*; même on pourra passer immédiatement de C en E, à la idition de relever en E l'angle DE*n*, et ainsi de suite. Il clair, en effet, que de ces angles BC*n*, DE*n* on conclura ix CB*n*, ED*n* qu'on aurait observés en B, D... car les iations du numéro précédent donnent :

$$CBn = nCD - C + 180^\circ = BCn + 180^\circ$$
$$EDn = nEA - E + 180^\circ = DEn + 180^\circ$$

isi, l'angle que l'on aurait observé en B n'est autre chose e BC*n*, plus une demi-circonférence, et celui qu'on aurait servé en D = DE*n* + demi-circonférence. En général, ngle qu'on n'a pas observé est égal ici à celui qu'on a obvé *plus* ou *moins*, une demi-circonférence; ce qui fait e, dans la construction de la figure, on prendra dans s les cas sur le rapporteur pour former l'angle qu'on n'a int observé le numéro de la division *diamétralement* opsé à celui qui correspond à l'angle observé. En particur, pour former l'angle *n*BC au point B, on prendra méro de la division diamétralement opposé à BC*n*. gle BC*n* étant = 106° par exemple, *n*BC sera = Cette observation conduit naturellement au p vant, qui donne le moyen de marquer sur un p partie, plusieurs points de la crête des mo ition des plateaux, la naissance ... fin des

3. Problème. *Deux points* A *et* B ... terrain rqués sur le plan en a et b, et ... rection ntée étant connues par rapport à ... B, rte le point M.

Mathématiques appliquées.

De la station M du terrain on visera aux points A et l'on inscrira les angles *n*MA, *n* MB. Il n'y a pas d'a données à recueillir sur le terrain. En effet, l'on a

$$nAM = sAM + 180^\circ = nMA + 180^\circ$$
$$nBM = nMB - 180^\circ$$

d'où l'on conclut que, pour placer *m* sur la carte, il su à la rigueur de faire en *a*, toujours avec la gauche de rection nord de l'aiguille un angle $= n$MA $+ 180^\circ$, p angle en B $= n$MB $- 180^\circ$; ce qui revient à placer le porteur successivement en *a* et *b*, puis à tirer des indé par les divisions diamétralement opposées à celles qu respondent à la valeur des angles respectifs observés sur A et B. Les deux directions indéfinies se coupen un point qui sera la position du point *m* en la rapp par le même procédé aux points B C. Il n'y a pas d' si la droite tirée de *c* vient passer par le même point plan.

44. *Seconde méthode ; problème général : lever à la sole le polygone* ABCDE (fig. 42) *dont tous les som sont accessibles, en ne mesurant qu'une base* AB.

Placez la boussole à l'une des extrémités B de la ba sez sur l'autre extrémité A, puis de la même station I sur C ; ce qui donnera AB*n*, CB*n*. AB est connu.

Transportez la boussole en C ; de cette station, visez et sur D ; vous obtiendrez ainsi AC*n* et DC*n*.

Transportez la boussole en D ; de ce point, visez e sur A, puis sur E ; ce qui fera connaître AD*n*, ED*n* ;

Et ainsi de suite jusqu'en E où on relèvera AE*n*.

45. *Pour construire la figure à l'aide de ces do* on pourrait employer les angles intérieurs de chaque tri en remarquant que tous ces angles intérieurs se dédu de ceux qui ont été observés et que, après avoir con le premier triangle ABC, dans lequel le côté AB est c AC devient une base sur laquelle on construit le s

CD ; et ainsi de suite. En nous bornant au [illegible]
gle, par exemple, en désignant alors par A, B, C
intérieurs, on voit facilement que :

$$A = ABn - ACn$$
$$B = nBC - ABn$$
$$C = ACn - nBC + 180°$$

beaucoup plus simple [illegible]
ne des parallèles du papier [illegible]
ue b, on tirera une indéfinie ba faisant avec bn,
que la direction de l'aiguille, un angle nba = l'an-
rvé nBA ; puis, on portera à l'échelle, de b en a,
r de la base BA.
ême point b, on tirera l'indéfinie [illegible]
uche de l'aiguille, un angle [illegible]
t, pour donner à bc la longueur [illegible]
duira du point a une indéfinie ac, [illegible]
de na un angle nac = 180° + [illegible]
era l'indéfinie bc au point [illegible]
triangle. On remarque que l'angle nac [illegible]
rapporteur à la division *diamétralement* opposée à
qui donnerait ACn.
point c ainsi déterminé, [illegible]
d, faisant avec la [illegible]
= nCD, puis [illegible]
ie suivant [illegible]
= 180° + [illegible]
à le triangle [illegible]
[illegible]

tion de l'aiguille et le point A ; ce qui revient dans tous les cas sur le rapporteur la division *d ment* opposée à la graduation de l'angle avec A troisième sommet de chaque triangle.

Cette méthode devient plus exacte quand, au li sur le point A, on vise en outre sur B. . . , mái croquis doit être fait avec beaucoup de soin pou confusion.

46. *Troisième méthode ; problème général : boussole le plan du polygone* ABCDEF, *dont* A *accessible* (fig. 43).

Le principe de cette méthode est le même qu diqué §§ 9 et 27.

A l'extrémité de la base A, on relèvera tous formés entre la gauche du nord de l'aiguille de la rayons visuels AC, AD, AB, AF, AE.

On fera mesurer pendant cette opération la ba

On transportera la boussole à l'autre extrémité base, et l'on y relèvera tous les angles formés entr de l'aiguille et la droite des rayons visuels BC BF, BE.

La construction de la figure sur le papier est t pour que je m'y arrête, après ce qui a été dit.

47. *Problème : à l'aide de la boussole, men point* B *une parallèle à une ligne donnée* AC *sur* (fig. 44).

A l'extrémité A de la ligne donnée AC, obser A ; transportez la boussole au point B, et faites jalons dans la direction Bx déterminée par la con l'angle en B = celui observé en A.

48. *Levés au pantomètre* (page 967) *ou à l'équ* 976). — Le pantomètre ou l'équerre doivent tou placés horizontalement. Leur emploi convient su pays de plaine.

49. *Première méthode. Lever le plan du terrain*

qui est partout accessible, et dont tous les points es (fig. 45).
ur le terrain le plus long alignement possible AB; *base* ou la *directrice* du plan. Des sommets du C, D, G, L, M, conduisez sur cette base les perres C*c*, D*d*, G*g*, L*l*, M*m*; faites chaîner A*c* et *q*C, *qn* et *n*N. . . , c'est-à-dire, tous les segments , et toutes les perpendiculaires à cette base, dont irez les valeurs sur un croquis ou brouillon. Ces ffisent évidemment pour construire la figure sur le aide de la règle et de l'équerre, et pour en évaperficie (*Géom.*, I, 6).
r trouver le pied des perpendiculaires, le pied *f* r exemple, on procède par tâtonnement. On place ètre ou l'équerre en *f'* par exemple, et visant d'a- la direction *f'*A ou *f'*B, on regarde ensuite par s perpendiculaires à cette direction. Si l'on renied du jalon F du terrain, *f'* est le pied de la perre, mais il arrivera rarement qu'on rencontrera F r coup. Si ce jalon est à gauche, on reculera le instrument vers la gauche en *f''* par exemple; — it de nouveau suivant *f''* A, on regardera encore nètres perpendiculaires à cette direction *f''* A, si ntre le jalon F. S'il est à droite, on prendra une ntermédiaire entre *f'* et *f''*, et ainsi de suite jusie le fil vertical du plan perpendiculaire à la direcbase coupe exactement en deux le pied du jalon F. la méthode des arpenteurs; elle n'est pas toujours, faut, la plus commode, car elle exige quelquefois nombre de mesures partielles, telles que *q*Q, *c*C, I, prises tant à droite qu'à gauche de la base, et l'ailleurs que les points Q C D. . M sont tous acces- La méthode suivante est souvent bien préférable.
uxième méthode, dite des coordonnées (fig. 35). — à l'aide du pantomètre, deux alignements perpen-

diculaires l'un à l'autre NAM, OAP, puis chen cessivement sur ces deux directrices ou axes de nées, on y fait mesurer les distances à l'intersec pieds *k' e' i' g' h' c' b'. . . k e i g h... c b*, des perpe K*k'*, E*e'*, I*i'*... C*c'*, B*b'*... K*k* E*e* I*i*... C*c* B*b*.. de chaque jalon KEI. . . CB du terrain sur c axes.

Il est évident que ces distances (K*k*, K*k'*), (I*i*; terminent la position de chaque point KI..; sur l qu'il soit nécessaire de prendre aucune autre me hors des grands axes NAM, OAP.

Quant à la construction du plan sur le papier, c très-rapidement avec la règle et l'équerre comm l'indique.

Ce procédé exige un peu de tact pour bien axes principaux et les diriger de manière qu'o facilement les objets qu'il s'agit d'y rattacher.

52. *Emploi de l'équerre à réflexion.* — Un de nients de l'équerre ordinaire et du pantomètre es à des tâtonnements ponr trouver le point où la p laire abaissée de chaque signal vient couper le *L'équerre à réflexion* (page 976) remédie comp cet inconvénient, et rend ainsi fort expéditive l précédente qui convient particulièrement ainsi a NAISSANCES.

53. *Le petit sextant de poche* (page 975) — re évidemment l'équerre à réflexion. Il suffirait pour pieds des perpendiculaires de fixer l'alidade sur 90°, et d'employer alors le sextant comme l'équer en cheminant le long des axes.

54. *Problèmes divers.* Quels que soient la méth strument qu'on emploie, il arrive trop souvent qu est embarrassé d'obstacles qui gênent ou la vue sage, et l'on ne peut alors obtenir directement tout nées nécessaires pour calculer les triangles; on a

cours à des moyens indirects qui font l'objet des problèmes suivants :

55. *Problème.* — Soient (fig. 46) D, C, B trois points en ligne droite, et M un quatrième point, d'où l'on a relevé les angles D M C, C M B. On suppose connus D C et C B et l'on demande de calculer les triangles D C M, C M B dans lesquels on ne connaît dès lors que D C, C B et les angles qui sont opposés à ces côtés.

On imaginera une circonférence passant par les trois points D C M et une autre circonférence passant par les points C M B. On joindra leurs centres par une droite G O qui sera dès lors perpendiculaire à C M, et coupera cette ligne en deux parties égales.

Si de G et de O on abaisse des perpendiculaires G H, O I, respectivement sur D C et C B, puis, si des mêmes points on tire G D, G C, O C, O B, on aura $DH = HC$; $CI = IB$; angles $HGC = DMC$; $COI = CMB$, et dès lors

$$GC = \frac{HC}{\sin. DMC}; \quad OC = \frac{CI}{\sin. CMB}$$

$$GCO = 180^\circ - (GCH + OCI)$$
$$CGO + COG = 180^\circ - GCO$$

La somme de ces angles et celle des côtés G C, O C qui leur sont opposés étant connues, on obtiendra leur différence (*Géom.*, N. 1), ce qui donnera d'une part le plus grand angle C O G, de l'autre le plus petit $CGO = \frac{CGM}{2}$.

Donc, on connaîtra dans le triangle C G M tout ce qu'il faut pour calculer C M, et ce côté une fois connu, on pourra calculer les triangles D M C, C M B dans lesquels on connaîtra deux côtés et un angle.

56. *Autre problème* (fig. 47). — On connaît les positions de B, E, D par les longueurs BE, BD et l'angle EBD, on demande de placer un troisième point intérieur C, d'où l'on a relevé les angles B C E, B C D opposés aux côtés connus.

Si une circonférence de centre K passait par les B, C, E, et une autre de centre L passait par B, si l'on avait en outre conduit des centres K, L l diculaires KMP, LNQ, on aurait deux triangl BKE, BLD.

Dans le triangle rectangle KBM, on connaîtrait BE, l'angle droit M, l'angle BKM = 180° — BK = BCE, on aurait donc BK et KBM.

Dans le triangle rectangle BLN, on connaîtr droit N, l'angle BLN = 180°—BCD et BN = en déduirait donc BL et LBN.

On a aussi

angle LBK = EBD + KBM + LB

et ces trois angles sont connus. Donc, dans le tria on connaîtra les côtés BK, BL, et l'angle LBK c prennent, on pourra donc calculer les angles BK

Alors on connaîtra dans le triangle isocèle BK triangles et deux côtés KB, KC, d'où l'on tirera

Mais dans les triangles BCD, BCE on connaît ı un angle et deux côtés, on en déduira donc CE même ED, en remarquant que l'angle BKL = I

On aurait pu calculer aussi BC et EC par le tr dans lequel on connaît deux angles et un côté, ce déterminé doublement la position de C.

57. Enfin, s'il arrivait que dans un levé on eût ner un triangle ABC (fig. 48), dont on ne pourra directement qu'un angle B et un côté AB par e cela par suite d'obstacles tels qu'un bois qui gê et d'un marais qui s'oppose au passage ? voici c pourrait procéder.

On mesurerait de C vers B la plus grande lon sible CD ; on relèverait l'angle ADB — connai dans le triangle ADB, le côté AB et les angles calculerait le côté DB qu'on ajouterait à CD, de

l'on aurait CB, BA et l'angle B pour calculer le triangle ABC.

Si l'on ne pouvait mesurer dans la direction CB, on mesurerait dans une direction quelconque une droite CE —du point B, on relèverait les angles CBE, EBA ; puis, du point E, les angles AEB, AEC. Ces angles et le côté AB étant connus, on trouverait BE, qui conduirait à BC et, par suite, à AC.

On trouvera plusieurs autres problèmes usuels à l'article RECONNAISSANCES INDUSTRIELLES de mon *Aide-mémoire*.

CHAPITRE XII.

Notions de Nivellement.

1. *Faire le nivellement de deux points a b* (fig. 49), c'est, en fait, chercher la différence *bc* de leurs plus courtes distances O *a*, O *b* au centre de la terre, supposée sphérique.

En effet, les INSTRUMENTS dont on fait usage dans les nivellements (pag. 953) ont tous pour objet de déterminer la direction d'un plan *horizontal* AB, c'est-à-dire d'un plan perpendiculaire au prolongement du rayon terrestre O I mené au point I qu'ils occupent.

2. *Nivellement simple ;* — soit I l'un de ces instruments que nous supposerons *réglé* et d'abord placé à égales distances des points *a* et *b* dont on cherche la différence de niveau ; il déterminera un plan horizontal AB. Faites placer en *a* le pied d'une mire dont on élèvera le *voyant* jusqu'à ce que, la mire étant bien verticale, sa ligne de visée au-dessus du sol sera la *cote* du point *a* du terrain. On l'inscrira et, sans déranger l'instrument du plan AB dans lequel il peut d'ailleurs tourner librement, on fera porter le pied de la mire sur le point *b* ; puis la mire étant toujours bien verticale, on fera monter ou descendre le voyant jusqu'à ce que sa ligne de visée soit revenue dans le même plan horizontal AB. On inscrira la nouvelle cote *b*B du point *b*.

Retranchant B b de A a on aura évidemm
de niveau $bc = \mathrm{A}a - \mathrm{B}b$ des deux points
marque que *la plus petite cote appartient to*
le plus élevé.

On nomme *cote d'arrière* celle qu'on obti
point de départ *a*, et *cote d'avant* celle qu'o
sant au point d'arrivée *b*.

Cette simple opération suffit quand on n'
deux points visibles tous deux de la station
général, leur distance ne dépasse guère de
mètres ; et enfin lorsque leur différence de
petite que la longueur totale de la mire, mo
strument.

3. *Si l'on a à niveler plusieurs points vi*
stants d'une station I (fig. 50), on peut o
porter successivement la mire aux points A_1
sans changer le plan horizontal AIE déte
strument I, amener le voyant dans ce plan
cotes a A, b B, c C, d D, e E feront évidemme
combien chaque point du terrain est enfonc
niveau général AE, élevé lui-même au-dessu
terrain de la hauteur i I de l'instrument.

Si l'on fait en même temps mesurer les
zontales et les directions relatives des diffé
B_1 C_1... E_1, on a, à la fois, tous les éléments
former le plan M_1 N_1 et le *profil* MN des p

4. *Rapporter le profil.* — On rapporte c
profil sur le papier à une échelle multiple d
afin de rendre les pentes plus sensibles à l'œ
en effet, que si l'échelle des hauteurs est, p
fois plus grande que celle des distances h
différences de niveau de deux points success
multipliées par dix.

5. *Lorsque deux points à niveler sont t*
de l'autre, il faut, en général, faire subir
cote de chacun d'eux : 1° une correction e

: la lumière, correction toujours *additive*; 2° une
: correction h toujours *soustractive* due à la sphéri-
la terre. Ainsi A étant la cote lue sur la mire, on a
s :

Cote réelle $= A + e - h$;
Cote réelle $=$ cote lue $- (h - e)$.

avons démontré (page 133) que k étant la distance en
qui sépare le pied de l'instrument de celui de la
n avait par approximation, dans les circonstances
hériques moyennes, R étant le rayon terrestre
3m :

$$k^2 \times \frac{0.01257}{1\,000\,000} \quad \text{et} \quad h = \frac{e}{0.16} = \frac{k^2}{2R}$$

à l'aide desquelles on a formé la table suivante :

	h	e	$h-e$	
0m	0.0008	0.0001	0.0007	La quatrième colonne donne les valeurs qu'il faut retrancher de la cote lue sur la mire pour avoir la cote de niveau vrai.
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
0	0.0196	0.0031	0.0165	
0	0.0283	0.0045	0.0237	
0	0.0385	0.0062	0.0323	
0	0.0503	0.0080	0.0422	
0	0.0636	0.0102	0.0534	
0	0.0786	0.0126	0.0660	
. .	. . . . .	. . . . .	. . . . .	
0	0.1767	0.0283	0.1484	
0	0.3142	0.0503	0.2639	
0	0.4909	0.0785	0.4123	
0	0.7069	0.1131	0.5938	
0	0.9621	0.1539	0.8082	
0	1.2566	0.2011	1.0556	

'our obtenir la différence de niveau de
stants, il faudra donc, en général, pre

rence de leurs cotes respectives ainsi corrigées. Mais marque que tout se compenserait de part et d'autre, la correction à faire aux cotes deviendrait inutile si l' ment était placé à distances égales ou à peu près ég deux points à niveler, position qu'il convient donc férer à toute autre.

7. *Si l'on a à niveler une série de points non visibl même station*, le nivellement est dit *composé*; et rien autre chose qu'une série de *nivellements sim* dans laquelle chaque coup de niveau *d'arrière* se do le point même du terrain qui vient de fournir la d cote d'avant.

Ainsi soient *a b c d* (fig. 51), les points à niveler l'instrument S_1 à distances autant que possible égales et *b*, et relevez les cotes *a* A, *b* B ; faites laisser le pied de bien exactement sur le point *b* du terrain, — transpor strument de la station S_1 à la seconde station convena choisie S_2 et ayant fait pivoter la mire pour qu'elle p son voyant tourné vers S_2, faites amener ce voyant plan horizontal I B' de la nouvelle station; elle fou cote *d'arrière* *b* B'. Laissant l'instrument à la sta après avoir tourné la lunette vers *l'avant* C faites p mire en *c*, et elle fournira, comme on l'a vu, la c *vant* *c* C. Puis, le pied de la mire restant en *c*, ce core l'instrument qui la devancera en le portant à de S_2 en S_3, et le voyant de la mire étant retourné e à la hauteur convenable, elle fournira la *cote d'arr* du point *c*. On la fera alors porter en *d* où elle don même la *cote d'avant d* D..., et ainsi de suite, en quant qu'il n'est nullement nécessaire que les sta l'instrument soient dans le plan vertical qui passe p positions successives de la mire, comme semble l'ind figure.

De même que dans le nivellement simple la diffé niveau de deux points successifs est donnée par la d

de leurs *cotes*, et la plus forte cote des deux appartient au point le plus bas.

8. Si l'on ne veut connaître que la différence de niveau des points extrêmes A, Z du nivellement, il suffit de faire, d'une part, la somme de toutes les *cotes d'arrière*, et de l'autre, celle de toutes les *cotes d'avant*, la différence de ces deux sommes est la différence de niveau des points extrêmes A et Z. Si la somme des cotes d'arrière est plus grande que la somme des cotes d'avant, et si l'on a marché de A vers Z, A est plus bas que Z. Z est plus bas que A dans le cas contraire; enfin Z et A sont dits *de niveau* si la différence est nulle, pourvu que l'on ait fait, s'il y a lieu, les corrections indiquées, § 5.

9. Il suffit, pour se rendre raison de cette règle, de remarquer que $a\ a'\ a''\ a'''$... étant les valeurs des cotes d'arrière, et $z\ z'\ z''\ z'''$ celles des cotes d'avant, on a pour les différences de niveau des points successifs

$$(a-z)+(a'-z')+(a''-z'')+(a'''-z''')+\ldots$$

somme qui revient à

$$(a+a'+a''+a'''\ldots)-(z+z'+z''+z'''\ldots)$$

c'est-à-dire que la *somme des différences est égale à la différence des sommes.*

10. *Vérification d'un nivellement.* — C'est une opération qu'il ne faut jamais manquer de faire. Elle consiste à revenir par un nivellement *réciproque* du point Z au point A, lorsqu'on a nivelé d'abord en marchant de A vers Z, et il convient de revenir par une route différente de celle que l'on a parcourue d'abord. On prend la moyenne des deux résultats obtenus lorsqu'ils diffèrent très-peu l'un de l'autre. Si la différence est grande, tout est à recommencer sans hésitation.

11. *Attentions générales.* — Ne jamais commencer un nivellement avant d'avoir vérifié et réglé le niveau (p. 970).

Le vérifier de nouveau dans le cours de la journée, lors le nivellement est d'une grande longueur.

Veiller à ce que la mire soit toujours placée bien verti lement.

Se faire montrer la mire et vérifier la cote inscrite pa porte-mire chaque fois qu'il passe à la station, et fair même vérification lorsqu'on passe devant lui pour se poi avec l'instrument à la station suivante.

On se trouve souvent bien de faire enfoncer un piqu chacune des places que la mire a occupées et d'y marquer numéro d'ordre en chiffres romains, parce qu'ils se trac facilement au couteau ou à la hache sur le bois.

Inscrire sur un registre et non sur une feuille vola toutes les données du nivellement, que l'on calcule ens en les disposant suivant un ordre qui dépend du but f de l'opération.

12. Voici l'exemple d'une disposition que j'ai sou adoptée ; il est donné par le nivellement d'un cours d'eau lequel on voulait établir une usine. On a fait enfonc fleur d'eau un piquet au point le plus en aval, on y a p le pied de la mire, et il a été appelé le numéro *zéro*, autres piquets ont reçu les marques I, II, III, IV, jusqu'i également enfoncé à fleur d'eau en amont, et sur lequel placé la mire qui a fourni le dernier coup d'avant.

La dernière colonne, qui se déduit de la précédente, f nit les ordonnées qui permettent de tracer sur le papie profil du terrain en prenant pour axe l'horizontale qui p par le point le plus bas du cours d'eau.

Numéros des piquets.	COTES arrière.	avant.	EXCÈS des premières sur les secondes.	HAUTEUR absolue au-dessus du piquet 0.
	m	m	m	m
0	3.367			+ 0
		0.370	+ 2.997	
I				+ 2.997
	3.040	0.667	+ 2.373	
II				+ 5.370
	3.779	0.543	+ 3.236	
III				+ 8.606
	3.191	3.672	— 0.481	
IV				+ 8.125
	2.590	3.293	— 0.703	
V				+ 7.422
Sommes.	15.967 8.545	8.545		
Différence.	7.422	=	7.422 = chute totale	

Voyez mon *Aide-mémoire des ingénieurs* pour les méthodes de nivellement trigonométrique des points situés à de très-grandes distances.

CHAPITRE XIII.

Tracés des Cadrans solaires.

La gnomonique est l'art de construire les cadrans sola
vant l'introduction des horloges, la construction d
drans était une branche d'industrie et de commerc
it donc ses modes et ses fantaisies, de là une foule
èmes, plus curieux qu'utiles, auxquels nous r
lecteur aux traités spéciaux nt à pré

sans calcul, les tracés relatifs aux cadrans le plus génér ment employés. On ne saurait douter de l'antiquité des c drans solaires; il est prouvé, par les saintes Ecritures, qu chaz, vers l'an 751 avant notre ère, possédait une hor de cette espèce. C'est donc à tort que les gens de lettres, fondant sur les écrits de Pline, attribuent à Anaximène l'i vention de ces cadrans.

Il est nécessaire, avant de passer à la construction cadrans, de définir quelques termes et de poser quel principes qui faciliteront l'intelligence de cette expositio

Par l'effet du mouvement diurne, le soleil paraît dé autour de notre axe des arcs de 15° par heure : or, conçoit la sphère coupée par douze plans passant to les pôles, et distants entre eux de 15°, le soleil les att successivement dans des intervalles égaux, et ces pla *raires* rencontreront l'horizon rationnel suivant douze qui prennent le nom de *lignes horaires*. Si, mainten fait abstraction de ces cercles pour ne conserver que terrestre et le plan qui contient leurs traces, ou les l *horaires*, l'on aura un cadran solaire placé au centre d terre; mais à cause de la grande distance du soleil et petitesse de notre globe, un point quelconque de la su peut être considéré, dans le cas actuel, comme le cent la sphère; dès lors, si l'on y transporte parallèlement à l première position et le plan et l'axe, le cadran solaire tracé pour ce lieu. Il résulte de là que, 1° *dans tout cad solaire, le style est situé dans le méridien ; 2° que de il est parallèle à l'axe de la terre, c'est-à-dire que pou lieu où le cadran est construit, ce style est incliné sur l rizon, comme l'est l'axe terrestre, d'un nombre de deg égal à l'élévation du pôle, qui, comme on sait, est égal à latitude.*

Il faut donc, avant de procéder à la construction d'un dran, 1° tracer une méridienne; 2° chercher l'élévation pôle ou la latitude du lieu. Nous allons résoudre le prem problème assez exactement pour le but que nous nous p

; la table qu'on trouve à la fin de ce chapitre résont
nd pour les principales villes ; pour les lieux qui ne
ıs compris dans cette table, il faudra consulter un
:tionnaire géographique.

TRACER UNE MÉRIDIENNE.

:herchera un endroit où le soleil donne en toute saison
neuf heures du matin jusqu'après trois heures du soir:
r à hauteur d'appui, ou une petite colonne de 1 mè-
m.30, fondée sur un massif de maçonnerie, seront très-
ables.

ılacera à demeure sur ce mur, ou ce piédestal, une
ı, une pierre de marbre ou de grès, bien plane et
ɜ ; on la rendra bien horizontale par les moyens con-
ɜ l'équerre avec un aplomb, ou du niveau à bulle d'air;
ı encore par le procédé très-simple de verser de l'eau
et de soulever la pierre doucement par des coins, du
ırs lequel l'eau tend à s'écouler ; on la garnira de plâ-
sous et autour, afin de l'établir solidement. Elle serait
lide si on la contenait par un ou deux boulons inté-
entrant de part et d'autre à demi-épaisseur.

:hoisira sur cette pierre, près de son bord méridional,
nt, autour duquel on décrira deux ou trois arcs de
concentriques, distants l'un de l'autre d'environ 7
ètres, et de l'étendue de 130 à 140 degrés.

ɜlèvera perpendiculairement sur ce centre un style ou
e de la longueur convenable, pour que vers neuf
du matin, dans la saison dans laquelle on opérera,
:te de l'ombre du style se trouve un peu en dehors du
grand des trois cercles tracés. Il sera très-commode
· pour style une tige cylindrique, mobile du haut en
ns un cylindre creux, dont le pied évidé forme un épa-
t circulaire, au milieu duquel la tige mobile, termi-
ı bas par une pointe très-fine, rencontre le centre des

cercles, tandis que son extrémité supérieure port
delle percée d'un trou qui forme un point lumi
bien plus précis à observer que ne l'est l'ombre
d'un corps opaque toujours mal terminée à caus
nombre qui l'accompagne.

Le style étant ainsi préparé, on choisira une
l'on puisse espérer que le soleil luira le matin
midi; et, vers neuf heures du matin, on ira ob
stant où le centre du point lumineux se trouvera p
sur la circonférence de chacun des trois cercles q
sera successivement, à mesure que le soleil s'
l'horizon, en s'approchant en même temps du m
on marquera d'un trait bien fin sur chacune de
férences l'endroit précis où le centre du point lu
la pointe du style, si l'on en emploie un) les au
vement traversés.

Après midi, on surveillera le moment auquel l
mineux (ou la pointe de l'ombre du style) s'app
cercle intérieur, et on marquera de même d'un
droit où chacune des trois circonférences sera co
point lumineux (ou la pointe d'ombre).

Alors, avec un compas ordinaire, on partager
sur chaque circonférence, l'arc compris entre le
qué le matin et celui marqué l'après-midi; et, po
le bord d'une règle bien droite, d'une part su
commun des trois cercles, et d'autre part sur la
des trois arcs, la ligne tracée le long de cette rè
méridienne; et, si les trois bissections se trouv
dues dans cette ligne, on aura la preuve de l'ex
l'opération; sinon on donnera à la ligne une directi
entre ces trois résultats.

La méridienne, ainsi tracée, n'est sensiblement
lorsqu'on opère dans l'une des deux saisons qui
aux solstices. Vers les équinoxes, elle exige une
d'environ un quart de minute ou 15'' de temps,

trouve trop à l'occident vers l'équinoxe du printemps, et trop à l'orient vers celui d'automne, en supposant qu'il se soit écoulé environ six heures entre les observations du matin et celles de l'après-midi : on peut faire aisément cette correction en observant la quantité de chemin que fait le point lumnieux (ou l'ombre du style) en une minute, immédiatement avant ou après midi ; le quart de cette quantité sera la correction recherchée, qu'on aura soin d'appliquer dans le sens convenable, avant de tracer la méridienne définitive.

CADRAN ÉQUINOXIAL.

Procédons maintenant au tracé des cadrans, et commençons par le plus facile, celui du *cadran équinoxial;* la construction en est si simple, qu'on la peut concevoir facilement sans figure.

En effet, il suffit de diviser un cercle en vingt-quatre parties égales, de placer au centre, et bien perpendiculairement au plan du cadran, un style qui le percera de part en part, puis de marquer du nº 12 l'extrémité d'un des rayons. Ce rayon représente l'intersection du cadran avec le plan du méridien ; le chiffre 12 est tourné entre le style et le nord, les points de division du côté de l'orient, et à partir du nº 12, prennent successivement les nºs 1, 2, 3, 4, 5, 6, etc.; ce sont les heures du soir ; ceux de l'occident, à partir du même point, sont marqués 11, 10, 9, 8, 7, 6, etc ; ce sont les heures du matin. Il ne s'agit plus que de tracer une méridienne sur un plan parfaitement horizontal d'après les principes que nous avons donnés, et d'assujettir convenablement le cadran sur ce plan, c'est-à-dire de manière que *le style soit parallèle à l'axe terrestre,* et que le rayon 12 soit compris dans le plan du méridien ; pour cela, on construit séparément un triangle rectangle dont un des deux angles aigus sera égal à la latitude du lieu ; ce triangle est ensuite placé bien verticalement, l'hypothénuse sur la méridienne horizon-

tale, et l'ouverture de l'angle de latitude tournée du cô du nord. On place alors le cadran bien perpendiculairem au plan de ce triangle, ces deux plans ayant pour intersecti commune le rayon 12.

Ce que cette explication pourrait avoir d'obscur deviend très-intelligible en exécutant le tracé.

Le cadran équinoxial, ainsi nommé parce que le soleil trouve dans son plan le jour de l'équinoxe, devra avoir de faces, une supérieure, pour le temps où le soleil a une clinaison boréale; l'autre inférieure, pour le temps des déc naisons australes. Le style qui le traverse pourrait, avec qu que attention, servir pour l'une et l'autre face. Si l' voulait que ce cadran donnât les heures, les jours mê des équinoxes, il faudrait munir sa circonférence d'un reb ou anneau perpendiculaire qui recevrait l'ombre du sty Il est clair que si l'on voulait avoir les demi-heures, il su rait de diviser le cercle en quarante-huit parties. En dessin ce cadran sur une glace, on s'épargne un des deux tracé

CADRAN HORIZONTAL.

C'est le plus commun dans l'usage ordinaire, parce qu peut l'établir commodément sur une fenêtre, sur un pil dans un jardin, etc.

Après s'être assuré que le plan sur lequel on veut fi le cadran est parfaitement horizontal, on y tracera une ridienne C, XII, fig. 52; par quelque point A de cette m dienne on fera passer une perpendiculaire AS d'une longu telle que CS, qui représente le style couché sur le cad fasse, avec AC, un angle SCA égal à la latitude du lieu. point S, on conduira une perpendiculaire SE à SC, qui rencontrer la méridienne C, XII en E.

Par ce point E, on conduira une perpendiculaire indéf NEQR à la méridienne. Prenant alors sur la méridie et à partir de E, une partie ES' egale à ES, on décrira

point S' comme centre une demi-circonférence qu'on divisera en douze parties égales. Par le centre S' et les intersections I, i''', i'', i', etc., on conduira les droites S' I, S' i'', S' i'', etc., qui prolongées suffisamment, iront rencontrer N R, en R, r''', r'',.... n, n', n'',.... Par ces points et par C, origine du style, on tirera VII C O R, C VIII, C IX qui iront se terminer au bord du cadran ; ce sont les lignes horaires qu'on cherche. La ligne de six heures VI. VI ne rencontre point la ligne N R, elle est perpendiculaire à la méridienne au point C.

Si l'on voulait avoir les lignes horaires des demi-heures, ce ne sont point les lignes E *r*, *rr''*, *r'r''*, etc., qu'il faudrait diviser en deux parties égales, mais bien les arcs E *i*, *ii'*, *ii''*, etc., qui donneraient, sur l'équinoxiale, des points d'intersection comme pour les heures.

Il est évident que le triangle C S A, que nous avons tracé dans le plan du cadran, devra être relevé perpendiculairement à ce plan, en faisant décrire au sommet S un quart de circonférence autour de A C comme charnière ; toutes les conditions sont alors satisfaites.

On pourrait être embarrassé pour trouver le point R situé hors du cadran ; si l'espace ne permettait point d'exécuter la construction de la figure 52, on pourrait y suppléer par le calcul suivant qui exige que le bord du cadran soit bien parallèle à la méridienne C XII. Les points P et Q étant donnés par le tracé, on connaît P Q, on le mesure ainsi que E C et E S' ; en multipliant entre elles les deux premières quantités, et divisant le produit P Q $\times$ E C par E S', on a la valeur O Q qu'on porte de Q en O, on peut alors conduire C O. Nous ferons remarquer d'ailleurs que la partie orientale du cadran ne diffère en rien de la partie occidentale. On peut donc, à la rigueur, ne tracer que la partie comprise dans l'angle VI, C, XII. On prend ensuite E *n* = E *r*, E *n'* = E *r'*, et ainsi de suite, ou mieux encore, si le cadran est bien rectangulaire, et si la méridienne le partage bien exactement en deux parties égales, on peut prendre sur les bords les parties XII, I

= [illegible] à chacun [illegible]

[illegible]

Du moment qu'il n'est point nécessaire de tracer sur l'emplacement même qu'il doit occuper, rien de le construire dans le cabinet sur une planche arbitraire; il suffit ensuite de l'orienter, c'est-à-dire sorte que la ligne C, XII, soit bien exactement le plan du méridien.

CADRANS VERTICAUX.

CADRAN MÉRIDIONAL.

C'est celui qui est tourné directement vers le peut marquer que de six heures du matin à six soir. La méthode de tracé ne diffère de celle du rizontal (fig. 52), qu'en ce qu'on fait l'angle S *complément* de la latitude du lieu. On trouve ce en retranchant la latitude donnée de 90°; ainsi, par exemple, dont la latitude est de 48° 50', il fa SCA de 90° moins 48° 50', c'est-à-dire de 41° 1 l'intersection du méridien avec le cadran devant t C, XII, il faudra renverser les heures, c'est-à- XI^h à la place de I^h, X^h pour II^h, IX^h pour III^h, quement. Le point XII marqué nord dans le cadr tal devient un des points inférieurs dans le cadr on voit donc *qu'un cadran vertical pour un lieu autre chose qu'un cadran horizontal tracé pou tude complémentaire.*

CADRAN ORIENTAL.

C'est celui qu'on trace sur le côté du méri directement l'orient; il ne peut donc m exclusivement. Il n'y a point de m

fig. 53) une dr[illegible] AB [illegible]
e AK qui fasse, [illegible]
ent de la latitude. Par [illegible]
ne perpendiculaire 6. D. [illegible]
en perpendiculairement [illegible]
uelques centimetres [illegible]
vrai style en l'inclinant [illegible] D.
omme centre, on décrit [illegible]
si divisée en quatre parts. On [illegible]
ties, et, par les points de d[illegible]
D 7, D 8, etc., qui, par leur rencontre avec les pa-
11, qui limitent le cadran, donnent la position des
raires 11, 11, 10, 10, 9, 9. Il est facile de [illegible]
dran satisfait aux conditions que nous avons [illegible]
haut.

CADRAN OCCIDENTAL.

lui qu'on trace sur le côté occidental du meridien.
de de tracé ne diffère en rien de celle du cadran
seulement le cadran occidental ne marquant que
heure jusqu'au coucher du soleil, ce sont les heures
, 5, 6, 7 qu'il faudra successivement mettre à la
1, 10, 9, 8, 7, etc.

CADRAN VERTICAL DÉCLINANT.

n décline à l'est ou à l'ouest, lorsque l'ombre d'une
rpendiculaire au plan, à l'heure de midi, tombe à
à gauche de la verticale abaissée de son pied sur

point quelconque A du plan (fig. 33), on plantera
gle métallique ou faux style.
ment précis de midi, qui sera donné par une méri-
horizontale tracée à côté, on marquera sur ce plan
té de l'ombre du faux style.

Par le point ainsi marqué, et au moyen d'un fi
on tracera sur le plan une ligne verticale, qui se
dienne du cadran.

Par le point A, on mènera une parallèle AB à
ridienne, et on lui donnera une longueur égale
faux style.

Par ce même point A, on mènera aussi une hori
minée en D, par la rencontre de la méridienne, et l
BD. L'angle en B sera la *déclinaison* du plan do
quantité angulaire dont il s'écarte du premier v
appelle ainsi le plan qui passe par le zénith et
d'est et ouest.

On prolongera l'horizontale AD au-delà de la m
d'une quantité DB' égale à DB; et au point B', et
l'on fera un angle égal à la latitude du lieu.

La droite, qui fera cet angle avec DB', ira ren
méridienne en un point C, qui est celui où il f
le vrai style, en ayant toujours soin de l'incliner
qu'il s'appuie sur le bout du faux style.

On élèvera encore en B' une perpendiculaire à
viendra couper la méridienne en un autre point I

Par les points C et A on fera passer une droit
pelle, en gnomonique, la *soustylaire*, et par le
lui mènera une perpendiculaire indéfinie, qui s
noxiale.

Du point M, et avec une ouverture de compas é
on coupera le prolongement de CA en un point
joindra MB".

Du point B', et avec la plus courte distance
à l'équinoxiale, on tracera une demi-circonféren
base doit toujours être parallèle à cette équinox

On divisera cette demi-circonférence en arcs
degrés, à compter du point où elle est coupée p
l'on fera passer, par tous les points de division,
qu'on prolongera jusqu'à la rencontre de l'équin

Enfin par ces derniers points, et par le point C, où le vrai style est fixé, on mènera des droites qui seront les lignes des heures, et qu'il sera facile de numéroter convenablement. On aurait les lignes des demi-heures, en divisant en deux également les arcs de 15°, et continuant comme on a dit plus haut.

Notre construction suppose que le plan donné est éclairé par le soleil à midi. Si cela n'était pas, voici ce qu'il faudrait faire :

1° Par le moyen de la boussole, ou, ce qui vaut mieux, au moyen d'une méridienne horizontale tracée à peu de distance et prolongée jusqu'au plan, on déterminera la déclinaison de ce plan.

2° En un point quelconque A du plan donné, on plantera le faux style perpendiculairement à ce plan.

3° Par le même point A, on mènera une verticale AB, qui doit être de la longueur du faux style, et au point B on fera un angle égal à la déclinaison trouvée. mais du côté vers lequel le plan décline. Le second côté de cet angle se terminera à l'horizontale AD.

4° Par le point D qu'on vient de trouver, on mènera sur le plan une verticale indéfinie, qui sera la méridienne du cadran.

5° On prolongera la ligne horizontale AD au-delà de la méridienne, d'une quantité DB' égale à DB, et l'on continuera comme dans le cas précédent, avec cette différence que le point C, où le vrai style doit être implanté, se trouvera au-dessous de l'horizontale AB'; que ce style se dirigera de bas en haut, en passant toujours par l'extrémité du faux style, et que tout le reste de la construction se fera au-dessus du point A, au lieu de se faire au-dessous. Le problème est donc résolu dans les deux cas qu'il peut offrir.

N. B. Si l'on voulait marquer sur le cadran vertical déclinant quelques lignes horaires de plus que celles qui sont données par l'équinoxiale, on couperait la dernière de celles-

ci par une droite parallèle à la ligne horaire, éloignée de six heures; et l'on prendrait sur cett l'intervalle entre la dernière ligne horaire et l nière, pour le porter de l'autre côté de celle donnerait un point de la ligne suivante, et ainsi

Problème. — Déterminer la déclinaison d'un

Il suffit pour cela d'appliquer horizontalemen mur le côté d'une boîte carrée de boussole, et la direction que suit l'aiguille aimantée. Lorsqu' quelle quantité le méridien magnétique s'écarte d du lieu, il est aisé de conclure la déclinaison du cette déclinaison, ou l'angle que fait le mur avec vertical, est le complément de l'azimut, c'est-à-dire donné par la boussole, corrigé comme nous venon de la déclinaison de l'aiguille. A Paris, la pointe n guille aimantée s'éloignait vers l'occident de 20°

Les méthodes graphiques que nous avons do duisent rarement, même avec la plus grande adr résultats bien rigoureux : on fera toujours mieux voudra une grande exactitude, d'employer le calc quel nous renvoyons à l'article *cadrans solaire* *Aide-mémoire des ingénieurs*.

Problème.

Régler une montre au moyen d'un cadran solai

Une ligne méridienne, avec son style, ou un laire régulièrement tracé, peuvent servir à régler le en ayant égard au défaut d'uniformité des retour au méridien dans diverses périodes de l'année qu'une montre ou une horloge bien réglée ne d der avec le soleil que quatre fois par an, et que da autres jours elle doit avancer ou retarder sur les laires, d'une manière fort irrégulière, parce qu'e

style est , ·auses, qui tantôt tendent à se compenser, tantôt des heu in sens contraire. Cette quantité d'*avance* ou de *re-tard* s un jour donné, se nomme *l'équation du temps*, et on la trouve indiquée dans les éphémérides, pour chaque jour de l'année, en minutes, secondes et dixièmes de seconde. Mais les montres ordinaires de poche n'étant pas susceptibles de marcher aussi uniformément que les horloges ou les garde-temps, on a pensé qu'il suffirait à la plupart des amateurs qui désirent régler leurs montres, c'est-à-dire, savoir de combien elles avancent ou retardent par jour sur le temps moyen ou uniforme, d'avoir une table dans laquelle ·ance erait l'indication des jours de l'année auxquels le naison moyen avance ou retarde sur le temps vrai ou solaire d'un nombre entier de minutes. On peut voir, en la consultant, que le 2 janvier la montre doit avancer de 4 minutes sur l'heure du soleil; que le 1er février elle doit avancer de 14 minutes, et se conserver ainsi jusqu'au 21 du même mois; de là avancer moins chaque jour, jusqu'au 16 avril, jour auquel elle doit s'accorder avec le soleil; puis retarder jusqu'à un maximum de 4 minutes seulement, qui tombe au 15 mai, et se retrouver d'accord avec le soleil vers le milieu de juin, etc. On peut remarquer que la plus grande différence entre les deux temps qui ait lieu dans toute l'année, répond à la fin d'octobre, et s'élève jusqu'à 16 minutes; et que dans le courant de décembre la montre, qui le 1er de ce mois retardait de 11 minutes, doit avancer de 3 minutes le 31; ce qui fait une différence de un quart-d'heure dans ce mois, différence dont on accuserait la montre, tandis que c'est à la marche apparente du soleil qu'elle doit être réellement attribuée.

Il est aisé de comprendre que cette table d'*équation du temps* étant bornée aux minutes, ne peut être à peu près exacte que jusqu'à ce degré, mais il est suffisant pour la très-grande pluralité des montres ordinaires; pour les autres on aura recours aux tables complètes calculées pour tous les jours.

Table des jours de l'année moyenne auxquels une montre réglée doit avancer ou retarder d'un nombre entier de minutes sur le midi d'un cadran solaire.

JOURS.		AVANCE minutes.	JOURS.		RETARD minutes.	JOURS.		RETARD minutes.
Janvier.	[illegible]	[illegible]	Mai.	1	3	Octobre.	4	11
	[illegible]	5		15	4		7	12
	[illegible]	6		30	3		11	13
	8	7	Juin.	5	2		15	14
	[illegible]	8		11	1		20	15
	[illegible]	9		16	0		28	16
	16	10			avance.	Novemb.	16	15
	19	11		20	1		21	14
	22	12		25	2		25	13
	[illegible]	[illegible]		30	3		28	12
Février.	[illegible]	[illegible]	Juillet.	5	4	Décemb.	1	11
	21	14		11	5		3	10
	28	13		22	6		6	9
Mars.	[illegible]	12	Août.	11	5		8	8
	[illegible]	11		16	4		10	7
	[illegible]	10		21	3		12	6
	16	9		[illegible]	2		14	5
	[illegible]	8		29	1		17	4
	[illegible]	[illegible]	Septem.	1	0		19	3
	26	6			retard.		21	2
	29	5		4	1		23	1
Avril.	1	4		7	2		25	0
	[illegible]	[illegible]		10	3			avance.
	8	[illegible]		13	4		27	1
	12	1		16	5		29	2
	[illegible]	[illegible]		19	6		31	3
		retard.		22	7			
	20	1		24	8			
	25	2		27	9			
	[illegible]	[illegible]		30	10			

tracé d'un cadran solaire étant basé sur la connaissance
oins approchée; de la latitude du lieu pour lequel il
onstruit, nous donnons ci-dessous, d'après l'Annuaire de
, le tableau des *coordonnées géographiques* des chefs-
des départements.

ns la colonne des longitudes, les lettres E. ou O. indi-
t que les objets se trouvent situés à l'*Est* ou à l'*Ouest*
éridien de Paris.

(*Voir les Tableaux suivants.*)

DÉPARTEMENTS.	CHEFS-LIEUX.	LATITUDE	LONGITUD
AIN.	**Bourg.** Sommet de la lanterne de l'église de Notre-Dame.	46°.12′.21″	2°.53′.28″
AISNE.	**Laon.** Sommet de la boule de la tour de l'horloge.	49.33.54	1.17.19.
ALLIER.	**Moulins.** Beffroi, base du toit de la lanterne. .	46.33.59	0.59.46.
ALPES (Bses.)	**Digne**.	»	»
ALPES (Htes.)	**Gap.** Sommet du clocher.	44.33.30	3.44.31.
ARDÈCHE.	**Privas.** Clocher des Récollets.	44.44.11	2.15.31.
ARDENNES.	**Mézières.** Boule de la petite coupole du clocher.	49.45.43	2.22.46.
ARIÈGE.	**Foix.** Tour ronde de la prison (sommet). . . .	42.57.57	0.43.59.
AUBE.	**Troyes.** Tourelle de l'angle S. de la tour de la cathédrale de Saint-Pierre.	48.18. 3	1.44.41.
AUDE.	**Carcassonne.** Parapet de la tour de Saint-Vincent.	43.12.54	0. 0.46.
AVEYRON.	**Rodez.** Sommet de la tête de la Vierge qui surmonte la tour de Notre-Dame.	44.21. 5	0.14.15.
BOUCHES-DU-RHÔNE.	**Marseille.** Clocher de Notre-Dame-de-la-Garde.	43.17. 4	3. 2. 3.
CALVADOS.	**Caen.** Sommet du clocher de l'Abbaye-aux-Dames.	49.11.14	2.41.24.

DÉPARTEMENTS.	CHEFS-LIEUX.	LATITUDE	LONGITUDE.
CANTAL.	**Aurillac.** Sommet du clocher.	44°.55′.41″	0°. 6′.22″.E.
CHARENTE.	**Angoulême.** Sommet du clocher de Saint-Pierre.	45.39. 0	2.11. 8.O.
CHARENTE-INFÉRIEURE.	**La Rochelle.** Tour de la lanterne.	46. 9.23	3.29.41.O.
CHER.	**Bourges.** Tourillon de l'horloge de l'église de Saint-Étienne.	47. 4.59	0. 3.43.E.
CORRÈZE.	**Tulle.** Clocher ; sommet de la boule. . . .	45.16. 7	0.33.58.O.
CORSE.	**Ajaccio.** Clocher de la cathédrale.	41.55. 1	6.24.18.E.
CÔTE-D'OR.	**Dijon.** Boule du clocher de Saint-Bénigne. . . .	47.19.19	2.41.55.E.
CÔTES-DU-NORD.	**Saint-Brieuc.** Cathéd. Sommet du clocher. . .	48.30.53	5. 6. 7.O.
CREUSE.	**Guéret.** Clocher de Saint-Pardoux.	46.10.17	0.28. 9.O.
DORDOGNE.	**Périgueux.** Sommet du clocher.	45.11. 4	1.36.54.O.
DOUBS.	**Besançon.** Boule du clocher en lanterne de la citadelle.	47.13.46	3.41.56.E.
DRÔME.	**Valence.** Sommet de la tour Saint-Jean. . . .	46.56. 5	2.33.18.E.
EURE.	**Evreux.** Boule de la flèche de la cathédrale. .	49. 1.30	1.11. 9.O.
EURE-ET-LOIR.	**Chartres.** Sommet du clocher neuf de la cathédrale.	48.26.53	0.50.59.O.
FINISTÈRE.	**Quimper.** Cathéd de Saint-Corentin, sommet de la flèche nord.	47.59.47	6.26.26.O.

DÉPARTEMENTS.	CHEFS-LIEUX.	LATITUDE	LON
GARD.	**Nîmes.** Somm. des ruines de la tour Magne. .	43°.50′.36″	2°.
GARONNE (HAUTE-).	**Toulouse.** Ancien observatoire.	43.35.40	0.5
	— Sommet du clocher de Saint-Sernin. . . .	43.36.33	0.5
	— Nouvel observatoire, la balustrade.	43.36 46	0.5
GERS.	**Auch.** Clocher (tour nord), sommet.	43.38.50	1.4
GIRONDE.	**Bordeaux.** Sommet de la boule de la flèche O. de la cathédrale. . . .	44.50.19	2.5
HÉRAULT.	**Montpellier.** Clocher Notre-Dame, sommet de la galerie.	43.36.44	1.3
	— Clocher de la cathédrale, sommet de la galerie.	43 36.18	1.3
ILLE-ET-VILAINE.	**Rennes.** Sommet du toit de la tour de Sainte-Mélaine.	48. 6.55	4.
INDRE.	**Châteauroux.** Clocher.	46.48.50	0.3
INDRE-ET-LOIRE.	**Tours.** Sommet de la tour septentrionale de la cathédrale.	47.23.46	1.3
ISÈRE.	**Grenoble.** Point culminant O. de la Bastille.	45.11.57	3.2
	— Clocher de Saint-Joseph.	45.11.12	3.2
JURA.	**Lons-le-Saulnier.** Sommet du clocher des Cordeliers.	46.40.28	3.1
LANDES.	**Mont-de-Marsan.** Tour Est de l'église.	43.53.38	2.5

ÉPARTE-MENTS.	CHEFS-LIEUX.	LATITUDE	LONGITUDE.
OIR-ET-CHER.	**Blois.** Sommet de la coupole supérieure de la tour de Saint-Louis.	47°.35'.20"	1°. 0'. 3".O.
OIRE.	**Montbrison.** Sommet du clocher.	45.36.22	1.43.45.E.
E (Hte.).	**Le Puy.** Sommet du grand clocher de la cathédrale.	45. 2.46	1.32.55.E.
OIRE-RIEURE.	**Nantes.** Sommet du toit qui surmonte la tour de la cathédrale.	47.13. 8	3.53.18.O.
	—Tour de Launay (sommet).	47.12.38	3.54.50.O.
OIRET.	**Orléans.** Sommet du clocher de Sainte-Croix	47.54. 9	0.25.35.O.
LOT.	**Cahors.** Clocher de la cathédrale; sommet. .	44.26.52	0.53.41.O.
OT-ET-RONNE.	**Agen.** Clocher de la cathédrale; sommet de la balustrade.	44.12.27	1.43. 6.O.
OZÈRE.	**Mende.** Flèche nord de la cathédrale; sommet sous la boule..	44.31. 4	1. 9.41.E.
INE-ET-OIRE	**Angers.** Sommet de la flèche de la tour méridionale de la cathéd. .	47.28.17	2.53.34.O.
ANCHE.	**Saint-Lo.** Sommet de la flèche septentrionale	49. 6.59	3.25.55.O.
ARNE.	**Châlons-sur-Marne.** Sommet de la flèche septentrionale de la cathédrale.	48.57.21	2. 1.18.E.
NE (Hte.)	**Chaumont.** Sommet du clocher du collège. . .	48. 6.47	2.48.19.E.

DÉPARTEMENTS.	CHEFS-LIEUX.	LATITUDE	LONGIT
MAYENNE.	**Laval.** Sommet du clocher.	48° 4′ 7″	3° 6.3
MEURTHE.	**Nancy.** Centre de la boule du clocher. . . .	48.41.31	3.51.
MEUSE.	**Bar-le-Duc.** Sommet du clocher de l'église de Saint-Pierre.	48.46. 8	2.49.2
MORBIHAN.	**Vannes.** Saint-Pierre. .	47.39.31	5. 5.4
MOSELLE.	**Metz.** Flèche de la cathédrale; la base de la petite flèche.	49. 7.14	3.50.2
NIÈVRE.	**Nevers.** Clocher de la cathédrale, tour Saint-Cyr.	46 59.15	0.49.1
NORD.	**Lille.** Boule de la lanterne du dôme de la Madeleine.	50.38.44	0.43.3
OISE.	**Beauvais.** Clocher de Saint-Pierre; le faîte de l'église.	49 26. 0	0.15.1
ORNE.	**Alençon.** Sommet du clocher de Notre-Dame	48.25.49	2.14.5
PAS-DE-CALAIS.	**Arras.** Pied du lion du beffroi.	50.17.31	0.26.2
PUY-DE-DOME.	**Clermont - Ferrand.** Somm. de la plus grosse des deux boules qui surmontent la coupole de la cathédrale.	45.46.46	0.44.5
PYRÉNÉES (BASSES-).	**Pau.** Tour du château, sommet de l'escalier. .	43.17.44	2.42.4
PYRÉNÉES (HAUTES-).	**Tarbes.** Clocher des Carmes, pied de la croix.	43.13.58	2.15.1
	— Clocher de la cathédrale, pied de la croix.	48.14. 5	2.16.

Amiens. Pied de la croix de la flèche de la [illegible] drale. . . . .

DÉPARTEMENTS.	CHEFS-LIEUX.	LATITUDE	LONG
TARN.	**Alby.** Tourelle ou clocheton de la cathédrale; le sommet.	43°.55′.44″	0°.11′
TARN-ET-GARONNE.	**Montauban.** Sommet du clocher de l'église Saint-Jacques.	44. 1. 6	0.59
VAR.	**Draguignan.** Tour de l'horloge, sommet de la maçonnerie.	43.32.24	4. 7
VAUCLUSE.	**Avignon.** Télégraphe.	43.57.13	2.28
	—Palais des Papes, tour, clocher.	43.57. 5	2.28
VENDÉE.	**Napoléon-Vendée.** Tour N. de l'église; sommet de la balustrade.	46.40.17	3.45
VIENNE.	**Poitiers.** Sommet du clocher de Saint-Porchaire.	46.34.55	1.59
VIENNE (HAUTE-).	**Limoges.** Sommet de l'église de Saint-Michel-des-Lions.	45.49.52	1. 4
VOSGES.	**Epinal.** Centre de la boule du clocher de l'hôpital.	48.10.24	4. 6
YONNE.	**Auxerre.** Sommet de la petite coupole sur la tour de Saint-Etienne.	47.47.54	1.14

CHAPITRE XIV.

Partage des Propriétés.

Je réunis ici, d'après mon *Aide-mémoire des ingénieurs*, les solutions des principaux problèmes auxquels le *partage des propriétés* peut donner naissance ; et je laisse aux jeunes géomètres le soin de chercher les raisonnements assez faciles qui conduisent à ces solutions.

Par une droite partant d'un sommet B (fig. 55), *diviser un triangle en deux parties qui soient entre elles comme* m : n.

Il suffit de partager la base $b = AC$ en deux parties x et y telles que l'on ait

$$x = \frac{m}{m+n} \cdot b; \quad y = \frac{n}{m+n} \cdot b$$

et de conduire la droite par le sommet et l'extrémité de x ou de y.

Si le triangle devait être partagé en trois parties (fig. 56) qui fussent entre elles comme $m : n : p$, la base $b = AC$ devrait être partagée en trois segments x, y, z, tels qu'on eût

$$x = \frac{m}{m+n+p} \cdot b; \; y = \frac{n}{m+n+p} \cdot b; \; z = \frac{p}{m+n+p} \cdot b$$

Par une parallèle DE (fig. 57) *au côté* AC *d'un triangle, en séparer un triangle semblable* DBE *qui soit le* $\frac{1}{n}$ *du triangle total.*

On conduira une parallèle à AC, soit par le point D donné lui-même par

$$BD = AB\sqrt{\frac{1}{n}}$$

soit par le point E donné par

$$BE = BC\sqrt{\frac{1}{n}}$$

Si le triangle ABC (fig. 58) *devait être partagé en quatre parties équivalentes,* on conduirait trois parallèles à AC par les points d, d', d'' déterminés eux-mêmes par les relations

$$Bd = AB\sqrt{\frac{1}{4}};\quad Bd' = AB\sqrt{\frac{2}{4}};\quad Bd'' = AB\sqrt{\frac{3}{4}}$$

$$Bd = 0.5 \ldots AB;\quad Bd' = 0.707 \ldots AB;\quad Bd'' = 0.866 \ldots AB$$

Par une droite y *perpendiculaire à la base* b = AB (fig. 59) *partager le triangle* ABC = T *en deux parties* AEF, EFCBE *qui soient entre elles* :: m : n

Faisant $AD = a$; $DC = h$, on a

$$y = \frac{hx}{a} \quad \text{et} \quad x = \sqrt{\frac{mab}{m+n}}$$

Si le triangle devait être partagé en deux parties équivalentes, on aurait $m = n$ et dès lors

$$x = \sqrt{\frac{ab}{2}}$$

il pourrait arriver que AE fût plus grand que AD, alors on désignerait EB par x et BD par a.

Par un point D *donné sur la base* AB *d'un triangle* (fig .60) *conduire une droite qui partage le triangle* ACB *en deux parties équivalentes.*

Faites $AI = \frac{1}{2} AB$; menez CD, puis par le point I une parallèle à CD; DH est la ligne de division cherchée.

Par un point D *donné sur la base* AC *d'un triangle* (fig. 61 et 62), *conduire deux droites* De, De' *qui partagent le triangle en trois parties équivalentes.*

Elevez les perpendiculaires Ke, K'e' qui détermineront les points ee'; les pieds KK' de ces perpendiculaires sont donnés par les proportions

$$BH : AH :: eK : AK = \frac{AH \times eK}{BH}$$

$$BH : HC :: K'e' : CK' = \frac{HC \times K'e'}{BH}$$

et l'on a d'ailleurs

$$Ke = \frac{2 . ABC}{3 . AD}; \quad K'e' = \frac{2 . ABC}{3 . CD}$$

si l'un des quotients qui donne K*e*, K'*e'*, était plus grand que la hauteur BH du triangle total, les deux lignes D*e* D*e'* couperaient un même côté BA ou BC du triangle (fig. 62).

Solution graphique du même problème (fig. 63). Joignez le point donné D sur la base au sommet B ; partagez la base AC en trois parties égales ; par les points de division F, F' menez F*e*, F'*e'* parallèles à BD ; menez les droites D*e*, D'*e'*, elles partagent ABC en trois parties équivalentes.

Sur le terrain, on mesure AD, DC, AB, BC ; pour avoir A*e*, on partage AB en parties proportionnelles aux deux lignes AF et AD, et pour avoir C*e'*, on partage BC en parties proportionnelles à CF' et CD ; c'est-à-dire que l'on a

$$Ae = \frac{AB \times AF}{AD} = \frac{AB}{AD} \times \frac{AC}{3}$$

$$Ce' = \frac{BC \times CF'}{CD} = \frac{BC}{CD} \times \frac{AC}{3}$$

La même méthode s'appliquerait à la division analogue d'un triangle en un plus grand nombre de parties équivalentes.

Partager un triangle (fig. 64) *en quatre triangles équivalents.*

Par le milieu *m* d'un côté AB menez une parallèle *m m'* à AC ; joignez *m* et *m'* au milieu *m''* de AC.

Partager un terrain triangulaire ABC (fig. 65) *en de*

portions équivalentes par deux sentiers qui aboutissent à un puits D.

Divisez BC en deux parties égales au point m; joignez AD; tirez MO parallèle à AD; les lignes Dm DO sont les axes des sentiers.

On connait dans le triangle ABC (fig. 66), *savoir : son aire* T, *les coordonnées rectangulaires* AH $= c$ BH $= d$ *de son sommet* B, *celles* A$f = a$ et D$f = b$ d'un point D.

On demande les coordonnées A$g' = x$, $f'\,g' = y$ *du point* f' *et celles* C$g'' = x'$, $f''\,g'' = y'$ *par rapport à* C, *les lignes* DfDf'Df'' *devant être telles que le triangle* T *soit partagé en trois parties équivalentes*, *et* Df *perpendiculaire à la base* AC.

On a

$$x = \frac{\left(\frac{2}{3}\mathrm{T} - ab\right)c}{ad - bc};\quad y = \frac{xd}{c}$$

$$x' = \frac{\left(\frac{2}{3}\mathrm{T} - \mathrm{C}f \times b\right)\mathrm{CH}}{\mathrm{C}f \times d - b \times \mathrm{CH}};\quad y' = \frac{x'd}{\mathrm{CH}}$$

Si l'une des lignes de division devait partir d'un des sommets, comme BD (fig. 67), on déterminerait les points $f'f''$ comme suit :

Après avoir mesuré la perpendiculaire Dh, on en déduirait

$$\mathrm{B}f' = \frac{2\mathrm{T}}{3\,.\,\mathrm{D}h} = \frac{\frac{\mathrm{T}}{3}}{\frac{1}{2}\,\mathrm{D}h}$$

et s'il arrivait alors que l'on eût BCD $= \frac{\mathrm{T}}{3}$, la division se trouverait opérée par les lignes Df', DB, DC.

Si le triangle DBC se trouve au contraire plus petit qu[illegible] s'il est égal par exemple à $\frac{\mathrm{T}}{3}$ — CDf'', on divisera la

férence C D f'' par la moitié de la perpendiculaire D f et l'on aura

$$Cf'' = \frac{2\,CDf''}{Df}$$

si enfin DBC est $> \frac{T}{3}$, s'il est égal à $\frac{T}{3} + z$, on divisera l'excès z par $\frac{1}{2}$ Dh' et l'on aura pour quotient la distance du point de division sur CB.

Solution graphique du même problème (fig. 68). Prenez CE $= \frac{1}{3}$ AC; joignez DE; menez Bf'' parallèle à DE; m étant le milieu de Bf' menez mf' parallèle à AD; tirez DB, Df', Df'', elles partagent le triangle en trois parties équivalentes en partant du point D, l'une d'elles allant au sommet.

Trouver dans l'intérieur du triangle ABC (fig. 69) *un point* D *tel que les droites menées de ce point aux trois sommets partagent le sommet en trois parties équivalentes.*

Partagez un des côtés AC en trois parties égales; par le point de division le plus voisin de la base menez une parallèle pp' à cette base; le milieu D de pp' est le point cherché.

Diviser un triangle donné ABC (fig. 69) *en trois parties proportionnelles à* m : n : p *par des lignes menées d'un point inconnu aux sommets* ABC *des trois angles.*

On partagera la base AC en trois parties proportionnelles à $m : n : p$. Par les extrémités de la partie moyenne on mènera des parallèles aux deux autres côtés; le point D où ces deux parallèles se couperont sera celui d'où partent les droites de division cherchées.

Trouver dans l'intérieur d'un triangle dont l'aire T, *les côtés* abc *et les angles* ABC *opposés à ces côtés sont connus, un point* O *qui soit à égale distance des trois sommets, et déterminer le rapport entre les trois triangles formés par les droites menées du point* O *aux* sommets ABC.

Appelant $\alpha \beta \gamma$ les angles autour du point O respec
ment opposés aux côtés $a\, b\, c$ du grand triangle, on a

$$OA = OB = OC = r = \frac{abc}{4T} = \text{rayon du cercle circons}$$

et les triangles partiels sont entre eux respectivement co
les sinus de leurs angles en O, ou :: sin. α : sin. β : si

Retrancher d'un triangle BCA = T (fig. 70) *un*
triangle dont l'aire soit $\frac{T}{n}$ *par une droite qui soit la*
courte possible.

On opérera vers le plus petit des angles du triangle.
B cet angle : on le divisera en deux parties égales p
droite BH et par le point D, et par H on conduira DHE
points D, H, E sont doublement déterminés par

$$BD = BE = \sqrt{\frac{CB \times BA}{n}}$$

$$BH = \cos.\frac{1}{2}\, CBA \sqrt{\frac{CB \times BA}{n}}$$

Etant données les deux bases b B *d'un trapèze dont*
est T *et la hauteur* H (fig. 71), *en séparer par une*
B' *parallèle aux bases un trapèze compris entre* b *et*
qui ait une aire déterminée t.

On a pour la hauteur h et pour la base B' de ce trap

$$h = -\frac{bH}{B-b} \pm \sqrt{\frac{2\,tH}{B-b} + \frac{b^2 H^2}{(B-b)^2}}$$

$$B' = b + \frac{B-b}{H}\,.\,h = \pm\sqrt{\frac{2\,t\,(B-b)}{H} + b^2}$$

Partager un quadrilatère ABDC = K (fig. 72) *en*
parties Q Q', *qui soient entre elles comme* m : n *pa*
droite ff' *parallèle à* AB.

Prolongez A C B D jusqu'à leur rencontre R et soit H la hauteur du triangle A B R et T son aire; soient aussi t l'aire du triangle R C D et R k = H'. Si H' était connu on porterait cette valeur sur H à partir de R et par son pied k on conduirait ff' parallèle à A B. Or, on a

$$H' = H\sqrt{\frac{nT + mt}{(m+n)T}}$$

Si Q et Q' devaient être équivalents, on aurait $m = n$ et dès lors.

$$H' = H\sqrt{\frac{T + t}{2T}}$$

Enfin s'il s'agissait de partager K en n parties équivalentes chacune = t par des droites parallèles à A B, on chercherait par la trigonométrie la valeur de A R; puis prenant à partir de R et sur A R des distances R$f = z$, R$g = z'$, R$h = z''$... on conduirait par les points f, g, h... des parallèles à A B. Ces points f, g, h seraient déterminés par les relations :

$$z = AR\sqrt{\frac{t + \frac{K}{n}}{t+K}}; \quad z' = AR\sqrt{\frac{t + \frac{2K}{n}}{t+K}}$$

$$z'' = AR\sqrt{\frac{t + \frac{3K}{n}}{t+K}} \cdots$$

Solution graphique du problème : Diviser un quadrilatère A B D C (fig. 73) *en deux quadrilatères équivalents par une droite* f f' *parallèle à* A B.

Prolongez A C D B jusqu'à leur rencontre en R; par le point D menez D E parallèle à la diagonale B C. Marquez le point m milieu de E A; sur R A comme diamètre décrivez une demi-circonférence; par le point m élevez mI perpendiculaire à R A; de R comme centre avec la corde F

rayon décrivez un arc qui coupera R A en f; la ligne vision cherchée est la parallèle à A B qui passe par ce p

Par une droite partant du sommet D (fig. 74) *pa le quadrilatère* A C D B = K *en deux parties* A C D E, *qui soient entre elles comme* m : n.

On aura

$$EDB = \frac{nK}{m+n}$$

et connaissant D $h = h$, on en déduira

$$BE = \frac{2 . EDB}{h} = \frac{2nK}{(m+n)\,h}$$

Diviser le quadrilatère A B C D = K (fig. 75) *en deu drilatères équivalents par une droite tirée d'un point à volonté sur un côté,* D C *par exemple.*

Prolongez B A ; tirez C A et par le point D mene diagonale C A une parallèle qui déterminera le po marquez le point m milieu de F B ; tirez E m et du p la parallèle C H à E m qui détermine le point H. — I la ligne de partage.

A partir d'un point M (fig. 76) *donné sur la ba partager le quadrilatère* A C D B = K *en deux* A C M N, N M D B *qui soient entre elles comme* m : n.

On a d'abord

$$AMNC = \frac{mK}{m+n}$$

la position connue de M donne A M, A C, M C et pa l'aire A C M, on en conclut

$$CMN = \frac{mK}{m+n} - ACM$$

d'où l'on tire pour la hauteur p N du triangle C M N

$$pN = \frac{CMN}{\frac{1}{2}\,MC}$$

Cette hauteur est la distance commune des parallèles C M, N'N.

Donc, par un point quelconque de C M ou de son prolongement, on élèvera à cette ligne une perpendiculaire $= p$N; puis, par l'extrémité de cette perpendiculaire, on conduira une parallèle à C M, elle coupera C D en un point N que l'on joindra à M par M N.

Partager un quadrilatère A B C D (fig. 77) *en* n *quadrilatères équivalents entre eux.*

Soit, pour plus de simplicité, $n = 3$; par un sommet quelconque C, par exemple, menez C E parallèle à A B; partagez A B et C E chacun en $n = 3$ parties égales qui détermineront les points bb' sur AB et ceux cc' sur C E; tirez D b', D b; par cc' menez les parallèles $c'i'$, ci à D b' D b et enfin joignez ib, $i'b'$.

Deux terrains sont séparés par une ligne ondulée Amnrpsq B (fig. 78) *on demande de remplacer cette ligne par une droite conduite de telle sorte que ces terrains conservent l'étendue qu'ils avaient.*

Menez A C perpendiculaire à X Y. Mesurez, par la méthode de T. Simpson, d'une part les espaces A$mnra$ + sqBCs que la droite A C ajoute au terrain situé du côté de Y et de l'autre l'espace $rpsr$ qu'elle ajoute au terrain situé du côté de X.

Si AmnrA + sqBCs = $rpsr$, la question est résolue par la droite A C.

Si au contraire AmnrA + sqBCs est plus petit ou plus grand que $rpsr$, on évaluera la différence que j'appelle D et l'on construira soit d'un côté, soit de l'autre suivant le sens de la différence, un triangle ACh en menant hc, le point h étant évidemment donné par

$$Ah = \frac{D}{\frac{1}{2}\,AC}$$

Partager un cercle (fig. 79) *en un nombre quelconque parties égales en surface et de même périmètre.*

Supposons quatre parties. Partagez le diamètre AE cercle en quatre parties $Ab = bc = cd = dE$. Sur c cune d'elles comme diamètre décrivez les demi-circonféren A1*b*, A2*c*, B3*d*, A4E. Opérez de même sur E*d*, E*c*, l EA, et vous aurez :

$$A1b3'E4'A = A13'E22'A = \ldots.$$

tant en périmètre qu'en surface.

Par une courbe continue, partager un cercle en d parties qui soient entre elles comme m : n, il suffira de p tager le diamètre en deux parties qui soient entre e dans le rapport $m : n$ et de décrire une demi-circonfére au-dessus de l'une de ces parties comme diamètre, et autre demi-circonférence au-dessous de l'autre prise a comme diamètre.

Partager un cercle en n *parties équivalentes par d'au cercles concentriques au premier* (fig. 80).

Soit $n = 4$; partagez le rayon CA du cercle donné $n = 4$ parties ; sur CA comme diamètre, décrivez une de circonférence. Par les points de division 1 2 3 élevez les données 1*a*, 2*b*, 3*c* et C*a*, C*b*, C*c* seront les rayons cercles concentriques qui résolvent le problème.

CHAPITRE XV.

Calculs et documents relatifs au Calendrier.

La première édition de ce petit livre publiée en 1827 tenait une notice assez étendue sur le *Calendrier*, qu n'ose plus reproduire ici après le beau travail de l'illu *Arago* sur le même sujet, inséré dans l'Annuaire du bu des longitudes de 1851. Je ne laisse guère subsister de c première notice que les formules connues qui constituen

que l'on appelle proprement le *Comput ecclésiastique*, et que M. *Arago* n'a reproduites que partiellement, plus quelques documents historiques ou chronologiques en rapport avec ce sujet difficile.

« Le *Bourgeois gentilhomme*, dans la comédie de Molière, » voulait que son maître de philosophie lui apprît l'*almanach*. » C'était là un vœu très-raisonnable, dit M. *Arago*, et tel » qui s'en moque serait bien embarrassé si on lui adressait » à ce sujet les questions même les plus élémentaires. Mais » on doit l'avouer, M. *Jourdain* se trompait en s'imaginant » que les leçons qu'il demandait seraient faciles et sim- » ples. L'explication de l'*almanach* touche aux points les » plus délicats et les plus épineux de la science et de l'éru- » dition. »

Contentons-nous donc de rappeler que sous *Romulus* l'année se composait de dix mois dont mars était le premier, ce qui explique comment les mois que d'après les Romains nous appelons encore septembre, octobre, novembre et décembre, ou septième, huitième, neuvième et dixième, ont aujourd'hui des dénominations qui ne concordent plus avec la division de l'année en douze mois, dont janvier est le premier; réforme qui fut commencée par *Numa* et complétée par les décemvirs.

Une assez grande confusion régna d'ailleurs dans la *chronotomie* jusqu'à l'an 45 avant Jésus-Christ, époque où *Jules-César*, empereur et souverain pontife à la fois, résolut de fixer le calendrier romain. D'après l'avis de Sosigènes, astronome égyptien, et se fondant sur une valeur un peu exagérée de la durée de l'année solaire, il arrêta que désormais l'année civile se composerait de 365 jours, et que au bout de 4 ans on ajouterait un sixième jour. Les mois restèrent fixés au nombre de douze, de 30 et 31 jours chacun, excepté celui de février, qui en avait 28 ou 29, suivant que l'année était commune ou bissextile. Le premier jour de chaque mois continua à s'appeler *calendes*, d'où nous vient le mot de *ca-*

1582. Bien que la différence entre l'évaluation
et la durée réelle 365j.2422 que le soleil empl
au même point de son orbite, fût presque nég
produisait, en s'accumulant, une erreur d'env
en 133 ans, en sorte que entre l'année 45 avant
et l'an 1582, où la réformation grégorienne s'a
quinoxe du printemps avait remonté au 11 n
de tomber le 21, où le concile de Nicée l'avait fi

En conséquence, Grégoire prescrivit de retran
née 1582 les 10 jours d'erreur, et de compter l
lorsqu'on serait parvenu au 5. Il arrêta, en outr
l'espace de 400 ans on retrancherait trois des b
culaires de la période julienne, savoir 1700, 18
tel est le calendrier *grégorien*, adopté aujourd'l
rope entière, à l'exception des Russes et des aut
du rit grec, qui ayant conservé le calendrier
ploient encore une année qui commence main
jours avant la nôtre.

Passons à la solution numérique des problèm
calendrier

lendemain, du surlendemain, de la veille, de l'avant-veille, et enfin de proche en proche, le nom de tous les jours de l'année. On sait d'ailleurs que le nombre des jours qu'on est convenu de donner à chacun des mois de l'année est

Janvier. . . .	31	Juillet.	31
Février. . . .	28 ou 29	Août.	31
Mars.	31	Septembre. . .	30
Avril.	30	Octobre. . . .	31
Mai.	31	Novembre. . .	30
Juin.	30	Décembre. . .	31

Les quatre mauvais vers suivants pourront peut-être aider à classer ce tableau dans la mémoire :

Trente jours à novembre,
Juin, avril et septembre,
De vingt-huit il y en a un,
Tous les autres ont trente et un.

Cela posé, appelant M le millésime d'une année, si on le partage en deux nombres ; l'un m, formé des deux chiffres à droite ; l'autre s, des deux chiffres à gauche, on aura pour *le nom du premier mars*, que nous appelons R, 1 désignant lundi, 2 mardi.... 7 dimanche,

$$R = \left(\frac{m + \frac{1}{4} m + 5s + \frac{1}{4} s + 3}{7}\right)$$

On négligera les fractions qui peuvent se trouver dans chacun des nombres, $\frac{1}{4} m$ ou $\frac{1}{4} s$, et R *n'est ici que le reste de la division du numérateur par le dénominateur, et l'on ne doit avoir aucun égard au quotient.*

Cette formule est générale ; mais de 1800 à 1900 elle se simplifie et devient

$$R = \left(\frac{m + \frac{1}{4} m - 1}{7}\right)$$

On demande quel était, en 1823, le nom de
mars.

Pour ce cas $m = 23$, et l'on a

$$R = \left(\frac{23 + 5 - 1}{7}\right) = \frac{27}{7} = 3 \text{ et un re}$$

Le nom du 1er mars 1823 était donc un sam
qu'on connaît la dénomination du premier jour
on a celle des

1. 8. 15. 22. 29.

Car, puisque ces nombres diffèrent de 7, les dé
sont les mêmes.

Problème.

On demande l'initial de mars 1855.

$$R = \left(\frac{55 + 13 - 1}{7}\right) = \frac{67}{7} = 9 + \text{un reste}$$

Ainsi le 1er mars 1855 est un jeudi.

Connaissant l'initial de mars, on obtiendra cel
mois au moyen de la table suivante, dans laquel
l'initial de mars quel qu'il soit, 2 son lendemai
du 3 mars, etc.

Janvier.	5	4	Juillet. . . . .
Février.	1	7	Août. . . . . .
Mars.	1		Septembre. . .
Avril.	4		Octobre. . . .
Mai.	6		Novembre. . .
Juin.	2		Décembre. . .
			Janvier. . . . .
			Février. . . . .

Ces nombres sont pour janvier et février 4 et
nées sont bissextiles.

Problème.

Distinguer les années bissextiles de celles qui ne le sont pas.

Si les deux chiffres à droite du millésime sont divisibles par 4 et sans reste, l'année est bissextile.

Si l'année est *séculaire*, elle sera bissextile si le millésime, c'est-à-dire les deux chiffres qui expriment le nombre de *siècles* est divisible par 4, sans reste. Aussi 1900 ne sera pas bissextile, et l'an 2000 le sera.

DU NOMBRE D'OR.

Dès l'année 433 avant notre ère, Méton, astronome athénien, avait remarqué que 19 retours du soleil au même point de son orbite correspondaient exactement, croyait-il, à 235 retours de la lune à une même *phase*. Cette découverte parut si belle aux Grecs, qu'on en exposa le calcul en lettres d'*or* dans les places publiques pour l'usage de tous les citoyens, et c'est de là que lui vient le nom de *nombre d'or*. Une légère erreur affectait toutefois le calcul de Méton, cependant, lorsqu'on ne prend pas un grand nombre de reproductions du *cycle de Méton*, on peut dire qu'après 19 ans les nouvelles et pleines lunes reviennent aux mêmes dates sinon aux mêmes heures; et N désignant le nombre d'or ou le rang de l'année du cycle on a

$$N = \left(\frac{M+1}{19}\right) = \left(\frac{m+55+1}{19}\right)$$

Si le numérateur est multiple de 19, on prend $N = 19$, et non pas 0, c'est-à-dire que dans ce cas l'année proposée est la dix-neuvième du cycle lunaire.

Pour l'intervalle de 1800 à 1900.

$$N = \left(\frac{m-4}{19}\right)$$

N désigne toujours le reste de la division des nombres compris entre parenthèses.

Problème.

Quel était le nombre d'or pour 1825?

$$N = \left(\frac{m - 4}{19}\right) \text{ devient } = \left(\frac{25 - 4}{19}\right) = \frac{21}{19}$$

qui donne pour reste 2,

2 est donc le nombre cherché.

Problème.

On demande le nombre d'or de l'année 1725.

$$N = \left(\frac{M + 1}{19}\right) \text{ devient } = \frac{1725 + 1}{19} = \frac{1726}{19}$$

qui donnent 90 pour quotient et un reste 16, qui est le nombre d'or cherché.

Les quotients donnent les nombres des cycles lunaires écoulés depuis le commencement de celui où se trouve l'ère chrétienne; il s'est donc écoulé 90 cycles lunaires depuis le commencement de celui où Jésus-Christ est né jusqu'à 1725, et cette année a été la seizième du quatre-vingt-onzième cycle lunaire, à compter depuis ce temps.

Pour 1855, on trouverait

$$N = \left(\frac{55 - 4}{19}\right) = \frac{51}{19}$$

ou 2 plus 1 reste 13 qui est le nombre d'or de cette année.

DES ÉPACTES.

Nous avons dit que les nouvelles lunes ne reviennent pas, comme l'avait cru Méton, précisément à la même heure tous

les 19 ans; la différence, qui est d'environ 1 heure $\frac{1}{2}$, dont le mouvement de la lune avance sur celui du soleil, forme un jour à peu près au bout de 304 ans : c'est pourquoi le nombre d'or n'indique plus exactement les nouvelles lunes. On a dès lors imaginé les *épactes*, qui expriment pour chaque année l'âge qu'avait la lune à la fin de l'année précédente. Il y a plusieurs manières de déterminer l'épacte : nous donnerons celle qui dépend de la connaissance du nombre d'or que nous savons trouver ; E étant l'épacte, on a

$$E = \left(\frac{11\,(N-1)}{30}\right) + 8 + \frac{1}{4}\,s + \frac{1}{3}\,s - s.$$

On néglige toujours les fractions, et l'on ne prend que le reste de la division des nombres entre grandes parenthèses.

Si E est négatif, il faut ajouter 30. Si $E = 0$, l'épacte se désigne par * : on la prend 0 ou 30 à volonté.

Pour l'intervalle de 1800 à 1900, la formule des épactes devient

$$E = \left(\frac{11\,(N-1)}{30}\right)$$

Problème.

On demande l'épacte de l'année 3081, qui a 4 pour nombre d'or.

Ici $s = 30$

$$E = \left(\frac{11\,(N-1)}{30}\right) + 8 + \frac{1}{4}\,s + \frac{1}{3}\,s - s$$

$$\text{devient } \left(\frac{11 \times 29}{30}\right) + 8 + 7 + 10 - 30$$

$$= 3 + 8 + 7 + 10 - 30 = -2$$

puisque ce résultat est négatif, il faut ajouter 30, et l'on a $30 - 2 = 28$ pour l'épacte demandée.

Problème.

On demande l'épacte pour l'année 1855.

13 étant le nombre d'or pour cette année, on

$$E = \left(\frac{11 \times 12}{30}\right) = \frac{132}{30} = 4 + \text{un r}$$

qui est l'épacte de cette année.

Au moyen de la dernière formule on constr suivante, qui doit changer avec les siècles.

Tableau de la correspondance entre les no et les épactes.

Nombre d'or.	Ép
1.	[illegible]
2.	[illegible]
3.	[illegible]
4.	[illegible]
5.	[illegible]
6.	[illegible]
7.	[illegible]
8.	[illegible]
9.	[illegible]
10.	[illegible]
11.	[illegible]
12.	[illegible]
13.	[illegible]
14.	[illegible]
15.	[illegible]
16.	[illegible]
17.	[illegible]
18.	[illegible]
19.	[illegible]

Lorsqu'on connaît l'*épacte* ou l'âge de la lur vier, on peut par la règle suivante trouver l'â pour une date donnée, à un jour ou deux près.

e. Ajoutez à cette date l'épacte de l'année et autant
s qu'il y a eu de mois entièrement écoulés depuis
nclusivement ; retranchez 30 si la soustraction est pos-
le reste est à peu près l'âge de la lune à la date don-
orsqu'il s'agit des deux premiers mois de l'année, on
ue mars à janvier et avril à février.

mple. Quel sera à peu près l'âge de la lune le 25 sep-
1855? L'épacte de l'année étant 12 et le nombre de
ntièrement écoulés étant 6, on ajoute la date 25 à 18,
donne 43. Retranchant 30, il reste 13. On voit que le
tembre la lune sera près d'être pleine. En fait elle
eine, et son âge exact sera 15, au lieu de 13 donné par
).

LETTRE DOMINICALE.

ppelle lettre dominicale, dans le calendrier, celle qui
e le dimanche. Il y a sept lettres qui deviennent tour
dominicales; ce sont A. B. C. D. E. F. G. On place
ces lettres à côté de chacun des jours de chaque
en commençant par le 1er janvier et suivant leur or-
turel. Ainsi A se met toujours à côté du 1er de jan-
à côté du 2, ainsi de suite; la lettre dominicale varie
s ans suivant l'ordre rétrograde, et dans les années
iles il y a deux lettres dominicales; R étant l'initial
rs que nous savons trouver, L la lettre dominicale,

$$L = 4 - R \text{ ou } 11 - R.$$

nnée est bissextile, outre cette lettre qui convient aux
rniers mois, il y en a une deuxième pour janvier et
, qui est

$$L = 5 - R \text{ ou } 12 - R.$$

1855, l'initial R de mars étant jeudi ou 4, on a pour
re dominicale de cette année

$$L = 11 - 4 \text{ ou } 7,$$

rrespond à G qui est ainsi la lettre dominicale pour

FÊTES MOBILES.

La chose la plus importante à connaître pour formel calendrier, est la *date pascale*, car le jour de Pâques une déterminé, les fêtes mobiles sont connues et détermin Le concile de Nicée a ordonné qu'on célébrerait la fête de ques le dimanche qui suit la pleine lune de l'équinoxe printemps; elle peut être célébrée 35 jours différents, jours compris entre le 22 mars et le 25 avril; de la conn sance de R, N et E, on tire celle de la date pascale, au mo des relations suivantes, dans lesquelles il faut toujours pr dre le reste du quotient des quantités entre parenthèses non le quotient lui-même.

1° Si E est plus petit que 24, Pâques est le

$$\left(\frac{E - (R + 2)}{7}\right) + 45 - E$$

de mars; sauf, si ce résultat passe 31, à ôter 31 et à pr dre la date en avril. Si E est plus petit que R + 2, ajoute 7 au numérateur pour le rendre positif.

2° Si E est égal à 24, Pâques est le

$$\left(\frac{7 - R}{7}\right) + 19 \text{ d'avril.}$$

3° Si E est plus grand que 24, Pâques est le

$$\left(\frac{E - (R \mp 4)}{7}\right) + 44 - E \text{ d'avril.}$$

Ce troisième cas offre une exception dans le cas où E = et N est plus grand que 11; quand on trouve 25 avril faut rétrograder d'une semaine et prendre le 18 avril.

On pourra s'exercer au calcul de toutes ces formule moyen des résultats suivants :

NNÉES.	R	N	E
n a.	= 1	6	25
. . . .	1	17	25
. . . .	0	14	23
. . . .	3	16	25
. . . .	1	17	24
. . . .	0	17	24

ıuvera que pour 1734 la fête de Pâques était le 25 our 1954 elle sera le 18 avril au lieu du 25; en tombait le 22 mars, et en 1820 le 33 mars, c'est-2 avril; enfin, pour 2258 et 2296, elle serait pour il et pour le 19 du même mois.

.E DE GAUSS POUR DÉTERMINER LA DATE PASCALE.

lonnerons encore un autre moyen de déterminer la 'âques; c'est une formule de M. Gauss, qu'il est peut-commode d'employer; elle est composée de plusieurs

isez le nombre donné de l'année par 19, et soit a de la division;
isez le nombre donné par 4, et nommez b le reste seconde division;
isez le nombre donné par 7, et nommez c le la troisième division;
isez $(19a + M)$ par 30, et nommez d le reste de la ıe division;
isez $(2b + 4c + 6d + N)$ par 7, et nommez e le ıe reste,
ır de Pâques sera le

$$(22 + d + e) \text{ de mars,}$$
$$\text{ou le } (d + e - 9) \text{ d'avril.}$$

Cette règle est générale pour le calendrie

$$M = 15 \qquad N =$$

constamment.

Elle a besoin d'une correction pour le ca
rien. Si le calcul donne le 25 ou le 26 d'avı
jours.

Dans le calendrier grégorien on a les val‹
N, par la table ci-jointe, qui suffira jusqu'eı

ANNÉES.	M
De 1582 à 1699.	22
1700 à 1799.	23
1800 à 1899.	23
1900 à 1999.	24
2000 à 2999.	24
2100 à 2199.	24
2200 à 2299.	25
2300 à 2399.	26
2400 à 2499.	25

Pour 1855 on aurait :

$$\frac{1855}{19} = 97 + \text{un reste } a = 12$$

$$\frac{1855}{4} = 463 + \text{un reste } b = 3$$

$$\frac{1855}{7} = 265 + \text{un reste } c = \text{zéro}$$

d'autre part, on a

$$M = 23 \quad \text{et} \quad N = 4$$

d'où résulte que

$$\frac{19a - M}{30} = 8 + \text{un reste } d = 11$$

ue

$$\frac{2b+4c+6d+N}{7} = 10 + \text{un reste } e = 6$$

ı jour de Pâques tombe donc en 1855

le (11 + 6 — 9) ou le 8 avril.

aintenant que nous savons déterminer la fête de Pâques, ı placerons les autres fêtes mobiles d'après le tableau ant :

ı Septuagésime.	63 jours avant Pâques.
a Quinquagésime, ou le dimanche gras.	49 jours avant Pâques.
es Cendres, ou l'entrée du carême.	Le mercredi suivant.
a Passion.	14 jours avant Pâques.
es Rameaux.	7 jours avant Pâques.
a Quasimodo.	7 jours après Pâques.
'Ascension.	Le jeudi, 40 jours après Pâques.
a Pentecôte.	10 jours après l'Ascension.
a Trinité.	7 jours après la Pentecôte.
a Fête-Dieu.	Le jeudi suivant.
'Avent.	Les quatre dimanches avant Noël sont les dimanches de l'Avent.
es Quatre-Temps.	Sont les mercredis qui suivent les Cendres, la Pentecôte, le 14 septembre et le 13 décembre.

Les fêtes fixes sont :

ı Circoncision, 1er janvier. — Les Rois, 6 janvier. — La ndeleur, 2 février. — L'Annonciation, 25 mars. — La t-Jean d'été, 24 juin. — La Saint-Pierre et Saint-Paul,

29 juin. — L'ASSOMPTION, 15 août. — La NATIVITÉ, 8 septembre. — La TOUSSAINT, 1er novembre. — La CONCEPTION, 8 décembre. — NOEL, 25 décembre.

Lorsque le dimanche de Pâques tombe avant le premier avril, l'Annonciation est remise au lundi huit jours après Pâques.

Calendrier républicain. — Le calendrier républicain n'a été en usage en France que pendant 13 ans. L'ère républicaine date du 22 septembre 1792 et finit en 1806; l'année républicaine se composait de 12 mois de 30 jours chacun, savoir :

Vendémiaire,	Brumaire,	Frimaire,
Nivôse,	Pluviôse,	Ventôse,
Germinal,	Floréal,	Prairial,
Messidor,	Thermidor,	Fructidor.

Chaque mois se divisait en trois décades, dont les jours prenaient les noms de :

1	Primi,	6	Sextidi,
2	Duodi,	7	Septidi,
3	Tridi,	8	Octidi,
4	Quartidi,	9	Nonidi,
5	Quintidi,	10	Decadi.

Douze mois à 30 jours ne formant que 360 jours, on compléta l'année par 5 à 6 jours complémentaires, et ainsi que le remarque M. Arago, comme si l'on s'était plu à jeter de la défaveur sur l'année républicaine, ces jours complémentaires furent appelés les *sans-culottides*.

Enfin on essaya, en 1793, de partager le jour en *dix* heures et l'heure en *cent* minutes, et on peut encore voir aujourd'hui dans la salle d'horlogerie du Conservatoire des Arts et métiers un grand cadran de carton exécuté sur le principe de cette division du jour. Il y a tout lieu de croire que c'est le seul cadran du genre qui ait jamais existé.

TABLE USUELLE

D'APPLICATIONS MATHÉMATIQUES.

ALLIAGE. 1° V étant la valeur de l'unité du mélange $x.\ y,$ les nombres d'unités mélangées, le prix de l'unité de mesure pour chacune étant $p,\ p',$ on a la relation

$$V = \frac{px + p'y + \dots}{x + y + \dots}$$

$a.\ b.\ c.$ étant les nombres qui indiquent combien de fois il y a les quantités connues A. B. C de trois substances différentes dans un premier mélange ; $d.\ e.\ f$ dans un second, $g.\ h.\ k$ dans un troisième, et $l.\ m.\ n$ ce qu'il doit y avoir de chaque substance dans une quantité de mélange cherchée représentée par $l+m+n$; enfin $x.\ y.\ z$ étant les nombres par lesquels il faut multiplier les trois mélanges pour former le quatrième ; on a

$$\begin{aligned} ax + dy + gz &= l \\ bx + ey + hz &= m \\ cx + fy + kz &= n \end{aligned}$$

$a.\ b.\ c.$ étant les nombres qui indiquent combien de fois il y a les quantités connues A. B. C de trois substances dans un premier mélange ; $d.\ e.\ f$ dans un second ; $g.\ h.\ k$ dans un troisième ; $x.\ y.\ z$ étant les prix respectifs de A. B. C, $p.\ q.\ r$ les prix respectifs des mélanges donnés, on a

$$\begin{aligned} ax + by + cr &= p \\ dx + ey + fz &= q \\ gx + hy + kz &= r \end{aligned}$$

ANNUITÉS. On emprunte aujourd'hui une somme S ; à la

fin de chaque période d'égale durée (année, semestre, mois), on rend au prêteur une autre somme constante a plus grande que l'intérêt que la somme due S eût produit pendant cette période ; il arrivera qu'au bout d'un nombre t de périodes, d'années par exemple, on se sera complètement acquitté. Le taux de l'intérêt $(f-1)$ est tel que, au bout de 1 période, 1 franc a acquis la valeur f.

f serait $= 1.05$ si le taux annuel de l'intérêt était à 5 p. °/o ou 0.05.

On demande la relation entre S qu'on nomme quelquefois le *prix* de l'annuité, a qu'on appelle la *quotité* de l'annuité ou l'*annuité* proprement dite, t le nombre de périodes écoulées entre l'instant où l'on a emprunté et celui où l'on s'est acquitté, et le taux de l'intérêt $f-1$. On a (1) :

$$S f^t = \frac{a\,(f^t - 1)}{f-1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(S)}$$

De cette formule générale on tire

$$a = \frac{S f^t\,(f-1)}{f^t - 1} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(A)}$$

équation qui donnera la somme a à payer à la fin de chaque période pour éteindre un emprunt S en t périodes (années, semestre).

C'est au moyen de cette formule qu'on a calculé les deux tables suivantes, qui résoudront la plupart des questions usuelles.

(1) On trouvera dans mon *Aide-Mémoire général des Ingénieurs* la plupart des démonstrations qui manquent ici.

Tableau indiquant l'annuité* a *que l'on doit recevoir ou payer à la fin de chaque année, pendant un nombre quelconque d'années depuis* 1 *an jusqu'à* 50, *pour éteindre un prêt ou un emprunt de* 1000 *francs, avec les intérêts composés à* 2, 3, 4, 5, 6 *pour* 100 *l'an.

ANNÉES.	2 p. 100	3 p. 100	4 p. 100	5 p. 100	6 p. 100
1	1020	1030	1040	1050	1060
2	515.05	522.61	530.20	537.81	545.44
3	346.76	353.53	360.35	367.21	374.11
4	262.62	269.03	275.50	282.01	288.60
5	212.16	218.36	224.63	230.98	237.40
6	178.53	184.60	190.76	197.02	203.36
7	154.51	160.51	166.61	172.82	179.14
8	136 51	142.46	148.53	154.72	161.04
9	122.52	128.43	134.49	140.70	147.02
10	111.33	117.23	123.29	129.70	135.87
11	102.18	108.08	114.15	120.39	126.79
12	94.56	100.46	106.55	112.83	119.28
13	88.12	94.03	100.14	106.46	112.96
14	82.60	88.53	94.67	101.02	107.59
15	77.83	83.77	89.94	96.34	102 96
16	73.65	79.61	85.82	92.27	98.96
17	69.97	75.95	82.20	88.70	95.45
18	66.70	72.71	78.99	85.55	92.36
19	63.78	69.81	76.14	82.75	89.62
20	61.16	67.22	73.58	80.24	87.19
21	58.79	64.87	71.28	78.00	85.01
22	56.63	62.75	69.20	75.97	83.05
23	54.67	60.60	67.31	74.14	81.28
24	52.87	59.81	65.59	72.47	79.68
25	51.22	57.00	64.01	70.95	78.23
26	49.70	55.94	62.57	69.56	76.90
27	48.29	54.56	61.24	68.29	75.70
28	46.99	53.29	60.01	67.12	74.59
29	45.78	52.12	58.88	66.05	73.58
30	44.65	51.02	57.83	65.05	72.65

ANNÉES.	2 p. 100	3 p. 100	4 p. 100	5 p. 100	6 p. 100
31	43.60	50.00	56.86	64.13	71.80
32	42.61	49.05	55.95	63.28	71.00
33	41.69	48.16	55.10	62.50	70.27
34	40.82	47.32	54.32	61.76	69.60
35	40.00	46.54	53.58	61.07	68.97
36	39.23	45.80	52.89	60.43	68.40
37	38.51	45.11	52.24	59.84	67.86
38	37.82	44.46	51.63	59.28	67.36
39	37.17	43.84	51.06	58.77	66.89
40	36.56	43.26	50.52	58.28	66.46
41	35.97	42.71	50.02	57.82	66.06
42	35.42	42.19	49.54	57.40	65.68
43	34.89	41.70	49.10	56.99	65.33
44	34.39	41.23	48.67	56.62	65.01
45	33.91	40.79	48.26	56.26	64.70
46	33.45	40.36	47.88	55.93	64.42
47	33.02	39.96	47.52	55.61	64.15
48	32.60	39.58	47.18	55.32	63.90
49	32.20	39.21	46.86	55.04	63.66
50	31.82	38.87	46.55	54.78	63.44

Cette table, calculée pour une somme de 1000 francs, peut servir pour toute autre somme; une simple porportion donnerait le résultat désiré : cette remarque s'applique aussi évidemment à la table suivante, dans laquelle on suppose que les paiements ne se font plus par année, mais par semestre.

Tableau indiquant l'annuité que l'on doit recevoir ou payer à la fin de chaque semestre, *pour un nombre quelconque de semestres, depuis* 4 *jusqu'à* 20, *pour éteindre un prêt ou un emprunt de* 1000 *francs, avec les intérêts compris à* 5, 6, 7, 8, 9, 10 *pour* 100 *l'an.*

SEMES-TRES.	5 p. 100 par an.	6 p. 100 par an.	7 p. 100 par an.	8 p. 100 par an.	9 p. 100 par an.	10 p. 100 par an.
4	265.82	269.01	272.27	275.52	278.79	282.05
5	215.24	218.37	221.51	224.62	227.81	230.97
6	181.55	184.59	187.69	190.79	193.90	197.01
7	157.49	160.49	163.55	166.61	169 72	172.83
8	139.47	142.45	145.49	148.52	151.62	154.72
9	125.46	128.45	131.47	134.50	137.59	140.69
10	114.26	117.23	120.26	123.29	126.40	129.51
11	105.11	108.07	111.11	114.15	117.27	120.39
12	97.49	100.46	103.50	106.55	109.69	112.83
14	85.84	88.53	91.60	94.67	97.84	101.02
16	76.60	79.61	82.71	85.82	89 04	92.27
18	69.67	72.71	75.85	79.00	82.27	85.55
20	64.16	67.21	70.39	63.58	76.91	80.25

De la formule générale (S) on déduit encore

$$S = \frac{a(f^t - 1)}{f^t(f-1)}$$

qui fera connaître la somme S qu'il faudrait verser aujourd'hui pour avoir droit pendant t années à un revenu constant a, le taux de l'intérêt étant $(f-1)$

Puis

$$f^t = \frac{a}{a - S(f-1)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (T)$$

qui, par l'emploi des logarithmes, fera connaître le nombre d'années t

$$t = \frac{\log.a - \log.[a - S(f-1)]}{\log.f}$$

Enfin, s'il s'agissait de déterminer f, et par suite le taux de l'intérêt $(f-1)$ auquel on a emprunté, sachant que pour être libéré à la fin de t périodes, on a payé a à la fin de chacune d'elles, on aurait à résoudre l'équation du $(t+1)^{ième}$ degré.

$$S f^{t+1} - (S+a) f^{t} + a = o$$

qui n'a point de solution générale, mais qui, pour tous les cas particuliers et usuels, se résoudra facilement par la méthode dite de *fausse position*.

On pourra vérifier les formules sur les données suivantes, indépendamment de toutes celles que la table fournit.

L'emploi des logarithmes est presque toujours nécessaire.

$a = 30000$ $t = 10$ $f = 1.04$ $S = 243326$,
$S = 100000$ $t = 10$ $f = 1.04$ $a = 12329.12$;
$S = 1$ million $t = 10$ $a = 120000$ f est très-près de 1.035.

Le taux est donc très-voisin de $3\frac{1}{2}$ pour 100.

ARC. On obtient sa longueur a lorsqu'on connait sa graduation en degrés ° au moyen de

$(a^{o}) = r a$, en minutes par $(a') = r'a$ et en secondes par $(a'') = r''a$, sachant d'ailleurs que

$r = 57^{o}, 29578$ dont le log. 1.75812264
$r' = 3437', 746$ log. 3.53627389
$r'' = 206264'', 8$ log. 5.31442514

r représente ici le nombre de degrés de l'arc égal au rayon, r'. r'' sont les nombres de minutes ou de secondes de cet arc.

BINOME. Développement de la puissance m du binome $x+a$;

Loi. Le nombre des termes est $m+1$;

Le 1er terme est x^{m}, le 2me $m x^{m-1} a$.

Les exposants de x vont toujours en diminuant d'une unité, ceux de a en augmentant d'une unité; le coefficient d'un

rme quelconque est le produit du coefficient du terme pré-
dent, par l'exposant de x dans ce même terme, divisé par
nombre qui exprime le rang de ce terme ; le dernier terme
ra a^m.

Formule,

$$(x+a)^m = x^m + m a x^{m-1}$$
$$+ \frac{m(m-1)}{1.2} a^2 x^{m-2}$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2.3} a^3 x^{m-3} + \ldots\ldots$$
$$\frac{m(m-)(m-2)\ldots(m-n+1)}{1.2.3\ldots n} a^n x^{m-n} \ldots\ldots + a^m$$

La même formule pourra servir au développement de
$(x+a+b)^m$, en faisant $a+b=c$, développant $(x+c)^m$ et
mettant ensuite $a+b$ à la place de c.

Si l'on avait à développer $(x-a)^m$, il suffirait de changer
le signe du second terme, celui du quatrième, celui du
sixième, et en général celui de chaque terme de rang pair.

On sait que

$$x+a = x\left(1+\frac{a}{x}\right) \text{ et que } (a+x)^m = x^m\left(1+\frac{a}{x}\right)^m$$

On cherche pour plus de simplicité le développement de

$$\left(1+\frac{a}{x}\right)^m \text{ ou celui de } (1+y) \text{ en faisant } \frac{a}{x} = y$$

$$(1+y)^m = 1 \frac{m}{1} y + \frac{m(m-1)}{1.2} y^2$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-m2)}{1.2.4} y^3$$
$$+ \frac{m(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4} y^4 + \ldots\ldots$$

m étant un nombre entier, la série s'arrêtera lorsque l'on sera
arrivé au terme du rang $m+1$.

Si l'exposant est fractionnaire, on a

$$(1+y)^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n}\,y + \frac{m\,(m-n)}{n\,.\,2n}\,y^2$$
$$+ \frac{m\,(m-n)\,(m-2n)}{n\,.\,2n\,.\,3n}\,y^3$$
$$+ \frac{(m-n)\,(m-2n)\,(m-3n)}{n\,.\,2n\,.\,3n\,.\,4n}\,y^4 \ldots\ldots +$$

Ce développement ne peut jamais s'arrêter.

Si l'exposant est négatif,

$$(1+y)^{-m} = 1 - \frac{m}{1}\,y + \frac{m\,(m+1)}{1\,.\,2}\,y^2$$
$$- \frac{m\,(m+1)\,(m+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\,y^2$$
$$+ \frac{m\,(m+1)\,(m+2)\,(m+3)}{1\,.\,2\,.\,3\,.\,4}\,y^4 -$$

CALOTTE SPHÉRIQUE. R étant le rayon de la sphère h la hauteur de la calotte, dont la surface est S, on a

$$S = 2\pi R\,h$$

ou la circonférence d'un grand cercle de la sphère par la hauteur de la calotte.

CERCLE. Sa surface $C = \pi R^2$, son rayon $R = 0.56419\sqrt{C}$.

CIRCONFÉRENCE du cercle, dont le diamètre est 1

= 3.14159 26535 89793 23846 26433
83269 50288 41971 66399 37510

ɜs cercles de diamètres 1 à 100 de leurs aires, de circonférences, et de la longueur du côté d'un carré ɹlent.

AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
0.78539816	3.14159265	0.88622692
1.22718463	3.92699081	1.10778365
1.76714586	4.71238898	1.32934038
2.40528187	5.49778714	1.55089711
3.14159265	6.28318530.	1.77245384
3.97607820	7.06858347	1·99401058
4.90873852	7.85398163	2.21556731
5.93957361	8.63937979	2.43712404
7.06858347	9.42477796	2.65868077
8.29576810	10.21017612	2.88023750
9.62112750	10.99557428	3.10179423
11.04466167	11.78097245	3.32335096
12.56637061	12.56637061	3.54490769
14.18625432	13.35176877	3.76646442
15 90431280	14.13716694	3.98802116
17.72054606	14.92256510	4.20957789
19.63495408	15.70796326	4.43113462
21.64753687	16.49336143	4.65269135
23.75829444	17.27875959	4.87424808
25.96722677	18.06415775	5.09580482
28.27433388	18 84955590	5.31736155
30.67961575	19.63495408	5.53891828
33.18307240	20.42035224	5.76047501
35.78470382	21.20575041	5.98203174
38.48456000	21.99114857	6.20358847
41.28249096	22.77654673	6.42514520
44.17864669	23.56194490	6.64670193
47.17297718	24.34734306	6.86825866
50.26548245	25 13274122	7.08981539
53.45616249	25 91813939	7.31137213
56.74501730	26.70353755	7.53292886
60.13204688	27.48893571	7.75448559
63.61725123	28.27433388	7.97604232

(*Suite de la Table.*)

DIAMETRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
9.25	67.20063035	29.05973204	8.19759905
.5	70.88218424	29.84513020	8.41915578
.75	74.66191290	30.63052837	8.64071251
10.	78.53981633	31.41592653	8.86226925
.25	82.51589454	32.20132469	9.08382598
.5	86.59014751	32.98672286	9.30538270
.75	90.76257525	33.77212102	9.52693944
11.	95.03317777	34.55751918	9.74849617
.25	99.40195505	35.34291735	9.97005290
.5	103.86890711	36.12831551	10.19160964
75	108.43403393	36.91371367	10.41316637
12.	113.09733553	37.69911184	10.63472310
.25	117.85881189	38.48451000	10.85626983
.5	122.71846303	39.26990816	11.07783656
.75	127.67628893	40.05530633	11.29939329
13.	132.73228961	40.84070449	11.52095002
.25	137.88646506	41.62610265	11.74250675
.5	143.13881527	42.41150082	11.96406348
.75	148.48934026	43.19689898	12.18562021
14.	153.93804002	43.98229714	12.40717695
.25	159.48491455	44.76769531	12.62873368
.5	165.12996385	45.55309347	12.85029041
.75	170.87318792	46.33849163	13.07184714
15.	176.71458676	47.12388980	13.29340388
.25	182.65416028	47.90928796	13.51496061
.5	188.69190875	48.69468613	13.73651734
.75	194.82783190	49.48008429	13.95807407
16.	201.06192982	50.26548245	14.17963080
.25	207.39420252	51.05888062	14.40118753
.5	213.82464998	51.83627878	14.62274426
.75	220.35327221	52.62167694	14.84430099
17.	226.98006922	53.40707511	15.06585772
.25	233.70504099	54.19247327	15.28741446
.5	240.52818753	54.97787143	15.50897119
.75	247.44950885	55.76326960	15.73052792
18.	264.46900493	56.54866776	15.95208465
.25	266.58667578	57.33406592	16.17364138

(*Suite de la Table.*)

IA-TRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
.5	268.80252140	58.11946409	16.39519811
.75	276.11654180	58.90186225	16.61675484
	283.52873696	59.69026041	16.83831157
25	291.03910692	60.47565858	17.05986830
5	298.64765163	61.26105674	17.28142503
75	306.35437111	62.04645490	17.50298177
	314.15926535	62.83185307	17.72453850
25	322.06233437	63.61725123	17.94609524
5	330.06357816	64.40264939	18.16765197
75	338.16299672	65.18804756	18.38920870
	346.36059005	65.97344572	18.61076543
25	354.65635814	66.75884388	18.83232216
5	363.25030101	67.54424205	19.05387889
75	371.54241865	68.32964021	19.27543562
	380 13271106	69.11503837	19.49699235
25	388.82117826	69.90043654	19.71854908
5	397.60782021	70.68583470	19.94010581
75	406.49263694	71.47123286	20.16166255
	415.47562843	72.25663103	20.38321928
25	424.55679467	73.04202919	20.60477601
5	433.73613573	73.82742735	20.82633274
75	443.01365154	74.61282552	21.04788945
	452.38934207	75.39822368	21.26944618
25	461.86320745	76.18362184	21.49100291
5	471.43524757	76.96902001	21.71255964
75	481.10546239	77.75441817	21.93411637
	490.87385212	78.53981634	22.15567313
25	500.74041655	79.32521450	22.37722986
5	510.70515575	80.11061266	22 59878659
75	520.76806971	80.89601083	22.82034332
	530.92915845	81.68140899	23.04190006
25	541.18842196	82.46680715	23.26345679
5	551.54586024	83.25220532	23.48501352
75	562.00147328	84 03760348	23.70657025
	572.55526110	84.82300164	23.92812698
.25	583.20722369	85.60839981	24.14968371
.5	593.95736105	86.39379797	24.37124044

(*Suite de la Table.*)

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d équi
27.75	604.80567318	87.17919613	24.59
28.	615.75216017	87.96459430	24.81
.25	626.79682177	88.74999246	25.03
.5	637.93965822	89.53539062	25.25
.75	649.18066943	90.32078879	25.47
29.	660.51985541	91.10618695	25.70
.25	671.95721616	91.89158511	25.92
.5	683.49275169	92.67698328	26.14
.75	695.12646198	93.46238144	26.36
30.	706.85834704	94.24777960	26.58
.25	718.68840688	95.03317777	26.80
.5	730.61664148	95.81857593	27.02
.75	742.64305085	96 60397409	27.25
31.	754.76763502	97.38937226	27.47
.25	766.99039394	98.17477042	27.69
.5	779.31132762	98.96016858	27.91
.75	791.73043607	99.74556675	28.13
32.	804.24771930	100.53096491	28.35
.25	816.86317729	101.31636307	28.58
.5	829.57681005	102.10176124	28.80
.75	842.38861759	102.88715940	29.02
33.	855.29859989	103.67255756	29.24
.25	868.30675696	104.45795573	29.46
.5	881.41308881	105.24335389	29.68
.75	894.61759542	106.02875205	29.91
34.	907.92027688	106.81415022	30.13
.25	921.32113305	107.59954838	30.35
.5	934.82016398	108.38494654	30.57
.75	948.41736968	109.17034471	30.79
35.	962 11275016	109.95574287	31.01
.25	975.90630540	110.74114103	31.23
.5	989.79803541	111.52653920	31.46
.75	1003.78794019	112.31193736	31.68
36.	1017.87601975	113.09733552	31.90
.25	1032.06227407	113.88273369	32.12
.5	1046.34670316	114.66813185	32.34
.75	1060.72930703	115.45353001	32.56

(*Suite de la Table*

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
37.	1075.21008569	116.23892818	32.79039623
.25	1089.78903909	117.02432634	33.01195296
.5	1104.46616727	117.80972450	33.23350970
.75	1119.24147022	118.59572267	33.45506643
38.	1134.11494794	119.38052083	33.67662316
.25	1149.08660043	120.16591899	33.89817989
.5	1164.15642768	120.95131716	34.11973662
.75	1179.32442971	121.73671532	34.34129335
39.	1194.59060651	122.52211348	34.56285008
.25	1209.95495809	123.30751165	34.78440681
.5	1225.41748449	124.09290981	35.00596354
.75	1240.97818552	124.87830797	35.22752027
40.	1256.63704143	125.66370614	35.44907701
.25	1272.39411208	126.44910430	35.67063374
.5	1288.24933751	127.23450246	35.89219048
.75	1304.20273770	128.01990063	36.11374721
41.	1320.25431266	128.80529879	36.33530394
.25	1336.40406240	129.59069695	36.55686067
.5	1352.65198690	130.37609512	36.77841740
.75	1368.99808617	131.16149328	36.99997413
42.	1385.44236022	131.94689144	37.22153086
.25	1401.98480903	132.73228961	37.44308759
.5	1418.62543261	133.51761777	37.66464432
.75	1435.36423096	134.30308593	37.88620105
43.	1452.20120412	135.08348410	38.10775779
.25	1469.13635202	135.87388226	38.32931452
.5	1486.16967488	136.65928042	38.55087125
.75	1503.30117212	137.44467859	38.77242798
44.	1520.53084433	138.23007675	38.99398471
.25	1537.85869131	139.01547491	39.21554144
.5	1556.28471306	139.80087308	39 43709817
.75	1572.80890957	140.58627124	39.65865090
45.	1590.43128086	141.37166940	39.88021164
.25	1608.15182692	142.15706757	40.10176837
.5	1625.97054775	142.94246573	40.32332510
.75	1643.88744335	143.72786390	40.54488183
46.	1661.90251374	144.51326206	40.76643856

(*Suite de la Table.*)

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.
46.25	1680.01575839	145.29866022
.5	1698.22717880	146.08405839
.75	1716.53677348	146.86945655
47.	1734.94454294	147.65485471
.25	1753.45048716	148.44025288
.5	1772.05460615	149.22565104
.75	1790.75689992	150.01104920
48.	1809.55736845	150.79644797
.25	1828.45601175	151.58184553
.5	1847.45282982	152.36724369
.75	1866.54782267	153.15264186
49.	1885.74099031	153.93804002
.25	1905.83233270	154.72343818
.5	1924.42184986	155.59883635
.75	1943.90954179	156.29423451
50.	1963.49540848	157.07963268
.25	1983.17944995	157.96503084
.5	2002.96166619	158.65042900
.75	2022.74205720	159.43582717
51.	2042.82062298	160.22122533
.25	2062.89736352	161.00662349
.5	2083.07227884	161.79202166
.75	2103.34536893	162.57741982
52.	2123.71663382	163.36281798
.25	2144.18607346	164.14821615
.5	2164.75368786	164.93361431
.75	2185.41947703	165.71901247
53.	2206.18344098	166.50441064
.25	2227.04557969	167.28980880
.5	2248.00589318	168.07520696
.75	2269.06438143	168.86060513
54.	2290.22104445	169.64600329
.25	2311.47588225	170.43140145
.5	2332.82889481	171.21679962
.75	2354.28008215	172.00219778
55.	2375.82944427	172.78759594
.25	2397.47698115	173.57299411

(*Suite de la Table.*)

AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
2419.22269280	174.35839227	49.18559436
2441.06657922	175.14379043	49.40715109
2463.00864068	175.92918860	49.62870782
2485.04087637	176.71458676	49,85025455
2507.18728710	177.49998492	50.07182128
2520.42387260	178.28538309	50.29337801
2551.75863286	179.07078125	50.51493474
2574.19156790	179.85617941	50.73649147
2596.72267781	180.64157758	50.05804820
2619.35196239	181.42697574	51.17960494
2642.07942166	182.21237390	51.40116167
2654.90505579	182.99777207	51.62271840
2687.82886464	183.78317023	51.84427513
2710.85084834	184.56856839	52.06583186
2733.97100678	185.35396656	52.28738859
2757.18933998	186.13936472	52.50894532
2780.50584795	186.92476288	52.73050205
2803.92053070	187.71016105	52.95205878
2827.43338821	188.49555921	53.17364552
2851.04442049	189.28095737	53.39517225
2874.75362754	190.06635554	53.61672898
2898.56100937	190.85175370	53.83828572
2922.46656692	191.63715186	54.05984245
2946.47029734	192.42255003	54.28139918
2970.57220350	193.20794819	54.50295591
2994.77228444	193.99334635	54.72451264
3019.07054008	194.77874452	54.94606937
3043.46697053	195.56414268	55.16762610
3067.96157576	196.34954084	55.38918283
3092.55435572	197.13493901	55.61073956
3117.24531051	197.92033717	55.83229629
3142.03444002	198.70573533	56.05385303
3166.92174434	199.49113350	56.27540976
3191.90722341	200.27653166	56.49696649
3216.99087720	201.06192982	56.71852322
3242.17270581	201.84732799	56.94007995
3267.43270920	202.63272615	57.16163668

(Suite de la Table.)

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
64.75	3292.83088742	203.41812431	57.38319341
65.	3318.30724030	204.20352248	57.60475015
.25	3343.88176802	204.98892064	57.82630688
.5	3369.55447036	205.77431880	58.04786361
.75	3395.32534774	206 55971697	58.26942034
66.	3421.19439974	207.34511513	58.49097707
.25	3447.16162652	208.13051329	58.71253380
.5	3473.22702806	208.91591146	58.93409054
.75	3499.39060438	209.70130962	59.15564727
67.	3525.65235549	210.48670778	59.37720400
.25	3552.01228735	211.27210595	59.59876073
.5	3578.47038197	212.05750411	59.82031746
.75	3605.02665737	212.84290227	60.04187419
68.	3631.68110754	213.62860044	60.26343092
.25	3658.43373248	214.41369860	60.48498765
.5	3685.28453219	215.19909676	60.70654438
.75	3712.23350667	215.98449493	60.92810111
69.	3739.28065592	216.76989309	61.14965785
.25	3766.42597994	217.55529125	61.37121458
.5	3793.66947873	218.34068942	61.59277131
.75	3821.01115229	219.12608758	61.81432804
70.	3848.45100564	219.91148574	62.03588478
.25	3875.98902375	220.69688391	62.25744151
.5	3903.62522162	221.48228207	62.47899824
.75	3931.35959426	222.26768023	62.70055497
71.	3959.19214168	223.05307840	62.92211170
.25	3987.12286386	223.83847656	63.14366843
.5	4015.15176082	224.62387472	63.36522516
.75	4043.27883254	225.40927289	63.58678189
72.	4071.50407903	226.19467105	63.80833862
.25	4099.82750030	226.98006921	64.02989536
.5	4128.24909633	227.76546738	64.25145209
.75	4156.76886714	228.55086554	64.47300882
73.	4185.38681274	229.33626370	64.69456555
.25	4214.10293309	230.12166187	64.91612228
.5	4242.91722821	230.90706003	65.13767901
.75	4271.82969810	231.69245819	65.35923574

(Suite de la Table.)

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
74.	4300.84034275	232.47785636	65.58079247
.25	4329.94916219	233.26325452	65.80234920
.5	4359.15615638	234.04865268	66.02390593
.75	4388.46132535	234.83405085	66.24546267
75.	4417.86466909	235.61944901	66.46701940
.25	4447.36618760	236.40484717	66.68857613
.5	4476.96588088	237.19024534	66.91043296
.75	4506.66374893	237.97564350	67.13168960
76.	4536.45979178	238.76104166	67.35324633
.25	4566.35400937	239.54643983	67.57480306
.5	4596.34640174	240.33183799	67.79635979
.75	4626.43696897	241.11723615	68.01791652
77.	4656.52571078	241.90263432	68.23947325
.25	4686.91262745	242.68803248	68.46102998
.5	4717.29771890	243.47343064	68.68258671
.75	4747.78098511	244.25882881	68.90414344
78.	4778.36242610	245.04422697	69.12570018
.25	4809.04204185	245.82962513	69.34725691
.5	4839.81983238	246.61502330	69.56881364
.75	4870.79579767	247.40042146	69.79037037
79.	4901.66993776	248.18581962	70.01192710
.25	4932.74225260	248.97121779	70.23348383
.5	4963.91274221	249.75661595	70.45504056
.75	4995.18140659	250.34201411	70.67659729
80.	5026.54824574	251.32741228	70.89815403
.25	5058.01325966	252.11281044	71.11971076
.5	5089.57644836	252.89820860	71.34126749
.75	5121.23781181	253.68360677	71.56282422
81.	5152.99735004	254.46900493	71.78438096
.25	5184.85506304	255.25440309	72.00593769
.5	5216.81095081	256.03980126	72.12749142
.75	5248.86501335	256.82579942	72.44965115
82.	5281.01725068	257.61059758	72.67060788
.25	5313.26766276	258.39599575	72.89216461
.5	5345.61624962	259.18139391	73.11372134
.75	5378.06301124	259.96679207	73.33527807
83.	5410.60794764	260.75219024	73.55683480

(*Suite de la Table.*)

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
83.25	5443.25105880	261 53758840	73.77839153
.5	5475.99234474	262.32298656	73.99994827
.75	5508.83180544	263.10838473	74.22150500
84.	5541.76944092	263.89378269	74.44306173
.25	5574.80525116	264.67918105	74.66461816
.5	5607.93923618	265.46457922	74.88617519
.75	5641.17139596	266.24997738	75.10773192
85.	5674.50173054	267,03537554	75.32928866
.25	5707.93023987	267.82077371	75.55084539
.5	5741.45692397	268.60617187	75.77240212
.75	5775.08178284	269.39157003	75.99395885
86.	5808.80481648	270.17696820	76.21551558
.25	5842.62602489	270.96236636	76.43707232
.5	5876.54540807	271.74776452	76 65862904
.75	5910.56296602	272.53316269	76.88018578
87.	5944.67869874	273.31856085	77.10174251
.25	5978.89260623	274.10395901	77.32329924
.5	6013.20468849	274.88935718	77.54485597
.75	6047.61494552	275.67475534	77.76641270
88.	6082.12337734	276.46015350	77.98796943
.25	6116.72998392	277.24555167	78.20952616
.5	6151.43476526	278.03094983	78.43103289
.75	6186.23772138	278.81634799	78.65263962
89.	6221.13885226	279.60174616	78.87419635
.25	6256.13815792	280.38714432	79.09575309
.5	6291.23563834	281.17254248	79.31730982
.75	6326.43129354	281.95794065	79.53886655
90.	6361.62512350	282.74333881	79.76042329
.25	6397.11712824	283.52873697	79.98198002
.5	6432.60730774	284.31413514	80.20353673
.75	6468.19566202	285.09953330	80.42509348
91.	6503.88219109	285.88493146	80.64699021
.25	6539.66689491	286.67032960	80.86820694
.5	6575.54977350	287.45572779	81.08976367
.75	6611.53082686	288.24112595	81 31132040
92.	6647.61005499	289.02652412	81.53287713
.25	6683.78745789	289.81192228	81.75443366

(*Suite de la Table.*)

DIAMÈTRE.	AIRE.	CIRCONFÉRENCE.	Côté d'un carré équivalent.
92.5	6720.06303556	290.59732044	81.97599060
.75	6756.43678800	291.38271861	82.19754733
93.	6792.90871521	292.16811677	82.41910406
.25	6829.47881719	292.95351493	82.64066079
.5	6866.14709394	293.73891310	82.86221752
.75	6902.91354546	294.52431126	83.08377425
94.	6939.77817177	295.30970942	83.30533096
.25	6976.74097284	296.09510759	83.52688771
.5	7013.80194367	296.88050579	83.74844444
.75	7050.96109928	297.66590391	83.97000117
95.	7088.21842465	298.45130208	84.19155791
.25	7125.57992480	299.23670024	84.41311464
.5	7163.02759971	300.02209840	84.63467136
.75	7200.57944940	300.80749657	84.83622840
96.	7238.22947380	301.59289473	85.07778484
.25	7275.97767308	302.37829269	85.29934150
.5	7313.82404707	303.16369106	85.52089830
.75	7351.76677499	303.94908922	85.74245503
97.	7389.76859584	304.73448738	85.96401176
.25	7427.81131940	305.51988555	86.18556849
.5	7466.95221771	306.30528371	86.40712522
.75	7504.19129079	307.09068187	86.62868195
98.	7542.52853864	307.87608004	86.85023869
.25	7581.96396126	308.66147820	87.07179542
.5	7620.49755865	309.44687635	87.29335215
.75	7658.12933081	310.23227453	87.51490888
99.	7697.85927774	311.01767269	87.73646568
.25	7736.68739944	311.80307085	87.95802234
.5	7775.61369591	312.58846902	88.17957907
.75	7814.63816715	313.37386718	88.40113580
100.	7853.76081315	314.15926535	88.62269254
.25	7893.98163397	314.94466352	88.84424927
.5	7932.30062952	315.73006168	89.06580600
.75	7972.23314494	316.51545984	89.28736273

COMBINAISONS. m choses que nous désignerons par les lettres $abc\ldots$ étant données, on peut les combiner entre elles d'après les conventions suivantes :

1° Ou l'on admettra tous les arrangements possibles sans rejeter ceux qui se trouveront composés d'une seule lettre répétée plusieurs fois, de telle sorte, par exemple, que abc combinés 2 à 2 donneraient dans ce système

aa	ab	ac
bb	ba	bc
cc	ca	cb

Nous appellerons ce mode *permutations avec répétitions* ou *arrangements*, et pour exprimer le nombre d'arrangements qu'on peut faire avec m lettres en les prenant p à p nous emploierons la notation

$$[m \mathrm{A} p].$$

On aura en général (p ne devant jamais excéder m),

$$[m \mathrm{A} p] = m^p$$

c'est-à-dire que pour avoir le nombre d'arrangements possibles de m lettres prises p à p, il faudra élever le nombre de lettres données à une puissance marquée par le nombre des lettres qui doivent entrer dans chaque arrangement.

Ainsi, 4 lettres prises successivement 1 à 1, 2 à 2, 3 à 3, et enfin 4 à 4, donneraient

$$[4\mathrm{A}1] = 4^1 = 4;\ [4\mathrm{A}2] = 4^2 = 16;$$
$$[4\mathrm{A}3] = 4^3 = 64;\ [4\mathrm{A}4] = 4^4 = 256;$$

et la somme s réunie de tous les arrangements possibles de m lettres prises depuis l'arrangement 1 à 1 jusqu'à m à m sera évidemment la somme de la PROGRESSION.

$$s = m + m^2 + m^3 \ldots m^{m-1} + m^m = \frac{m(m^m - 1)}{m-1} = \frac{m^{m+1} - m}{m-1}.$$

dans laquelle le premier terme est m, et le quotient m est le nombre des termes m.

On trouverait de même pour la totalité des signes réellement différents qu'on pourrait écrire avec les 24 lettres de l'alphabet

$$s = \frac{24^{25} - 24}{23} =$$

1, 391, 724, 288, 887, 252, 999, 425, 128, 493, 402, 200.

2° On peut aussi convenir de rejeter des arrangements précédents ceux tels que *aa bb cc* qui sont formés par la répétition d'une même lettre, de telle sorte que les trois lettres *abc*, prises deux à deux, par exemple, ne donneraient plus que

ab *ba* *bc* *cb* *ca* *ac*

et prises trois à trois,

abc *bac* *cba* *bca* *acb* *cab*.

Nous appellerons ce mode *permutation sans répétition*, ou simplement *permutation*, et pour exprimer le nombre de permutations qu'on peut ainsi former avec m lettres prises p à p, nous emploierons la notation $[m\text{P}p]$.

On a en général,

$$[m\text{P}p] = m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\ldots \times (m-p+1),$$

le nombre des facteurs devant être égal à p, et p ne devant jamais excéder m.

Ainsi, 6 personnes pourraient être placées dans une diligence de $[6\text{P}6] = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 720$ manières différentes, et le nombre des permutations des 7 notes de la gamme musicale est de 5040.

8 personnes pourraient se placer de 40320 manières.

3° On peut enfin, toutes choses restant comme ci-dessus, convenir toutefois de ne prendre qu'une seule des *permutations* composées des mêmes lettres en rejetant les autres,

ou, ce qui revient au même, considérer, par exemp
$b\,a$ comme une seule combinaison, ainsi que

$$abc \quad bac \quad cba \quad bca \quad acb \text{ et } c\ldots$$

Suivant ce mode, auquel nous réservons le nom
binaison, ces trois lettres $a\,b\,c$ prises deux à deux
neraient plus que ab ac bc, et trois à trois que a
exprimerons que m choses sont combinées p à p p
tation $[m\,\mathrm{C}\,p]$, et nous aurons en général

$$[m\,\mathrm{C}\,p] = \frac{[m\,\mathrm{P}\,p]}{[p\,\mathrm{P}\,p]} = \frac{m\,(m-1)\,(m-2)\ldots\times(m-}{1\times2\times3\ldots\ldots\times}$$

cette expression devant avoir p facteurs.

On parviendra souvent à simplifier les calculs, e
quant que

$$[m\,\mathrm{C}\,p] = [m\,\mathrm{C}\,q], \quad \text{quand } m = p + q:$$

Ainsi $[100\,\mathrm{C}\,88] = [100\,\mathrm{C}\,12]$, parce que $100 = 8$

On trouverait que les 90 numéros de la loterie
90 extraits, 4005 ambes, 117480 ternes, 2555190
et 43949268 quines.

m points dont on connaît les hauteurs absolues
$\frac{m\,(m-1)}{2}$, différences de niveau; combinés trois à
donneraient $\frac{m\,(m-1)\,(m-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$ triangles.

On peut aussi passer du nombre de combinais
lettres prises $(p-1)$ à $(p-1)$ à celui de m prises
l'aide de la relation

$$[m\,\mathrm{C}\,p] = [m\,\mathrm{C}\,(p-1)] \times \frac{m-p+1}{p}.$$

Enfin, l'on a aussi

$$[(m+1)\,\mathrm{C}\,p] = [m\,\mathrm{C}\,p] + [m\,\mathrm{C}\,(p-1)].$$

Ces relations apprennent à déduire les combin

DROI[illegible]

[illegible] surfac[illegible]

[illegible]

NE TRONQU[illegible]

[illegible]

volume [illegible]

[illegible]

CORDE [illegible]

[illegible]

Cette equation [illegible]

a corde [illegible]

COSINUS [illegible]

x (ne pour [illegible]

voyez Arc [illegible]

cos. x = [illegible]

CYLINDRE DROIT [illegible]

teur, S sa surface, V son [illegible]

[illegible]

DEGRÉ. (Voyez *Arc.*)

DIAGONALE du carré dont le côté est

$1 = \sqrt{2} = 1.41421356237309504880168$

DISTANCE δ d'un point $x'\,y'$ à une ligne

$$y = ax + b.$$

$$\delta = \pm \frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}$$

le signe supérieur s'appliquant au cas où
tuée entre le point donné et l'axe des absc
inférieur pour le cas où le point est donné e
l'axe des abcisses.

Distance entre deux points donnés (x

$$\Delta = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' -$$

EQUATION. On appelle ainsi, dans la
tique, la relation entre les coordonnées x et
points d'une droite ou d'une courbe.

Equation d'une droite. a est la tangente
de l'angle formé par la droite et l'axe des x,
les axes rectangulaires.

La droite *passant par l'origine des axe*

$$y = ax$$

ne passant point par l'origine

$$y = ax + b$$

b étant l'ordonnée connue qui correspond à

La droite passant par un point dont les
x' et y', et faisant, avec l'axe des abscisses,
tangente est a, son équation devient :

$$y - y' = a\,(x - x')$$

si elle passe par *deux points donnés* (x', y') (x'', y''),

on a $$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (x - x')$$

Equation de la perpendiculaire à la droite dont l'équation est $y = ax$ ou $y = ax + b$

$$y = -\frac{1}{a} x \text{ ou } y = -\frac{1}{a} x + b$$

Cette *perpendiculaire passant* en outre par un *point donné* (x', y')

$$y - y' = -\frac{1}{a} (x - x')$$

Equation du cercle. R étant le rayon de ce cercle, x et y les coordonnées d'un point quelconque de sa circonférence.

L'*origine* des coordonnées *étant au centre,* on a

$$y^2 + x^2 = R^2$$

L'origine des coordonnées n'étant point au centre, et ce centre ayant pour coordonnées a et b,

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

L'origine à l'extrémité du diamètre donne

$$y^2 = 2Rx - x^2$$

Equation de l'ellipse. a étant le *demi-grand axe* et b le *demi-petit axe.*

L'équation rapportée aux axes et au sommet

$$a^2 y^2 = b^2 (2ax - x^2)$$

rapportée au centre et aux axes, on a

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

δ étant la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer, θ l'angle que fait la trace de cette distance avec le

grand axe, e le rapport de l'excentricité au demi-grand axe a, l'équation polaire est, le pôle étant au foyer,

$$\delta = \frac{a\,(1 - e^2)}{1 + e \cos.\theta}$$

Equation de l'hyperbole. a étant le demi-premier axe, b le demi-second axe, l'origine étant au sommet,

$$a^2y^2 = b^2(2ax + x^2)$$

l'origine étant au centre

$$a^2y^2 - b^2x^2 = -a^2b^2$$

L'équation polaire de l'hyperbole (les mêmes lettres désignant les mêmes choses que pour le cas de l'ellipse) est

$$\delta = \frac{a\,(e^2 - 1)}{1 + e \cos.\theta}$$

Équation de la parabole rapportée au sommet est

$$y^2 = 2px$$

p est ici le demi-paramètre, c'est-à-dire la demi-ordonnée passant par le foyer de la courbe, l'équation polaire est

$$\delta = \frac{p}{1 + \cos.\theta}$$

δ étant la distance d'un point quelconque de la courbe au foyer pris pour pôle, et θ l'angle que fait δ avec l'axe des x.

ELLIPSE. A étant le petit axe, B le grand axe, S sa surface, on a $S = \frac{1}{4}\pi A B$, ou

$S = AB \times 0{,}78539816339744830961566084581 9\ldots$

ELLIPSOIDE. Son volume V = (axe de révolution)^2 (axe fixe) $\times \frac{1}{6}\pi$ ou

$V = B^2 A \times 0{,}5235987755982988730771072305 46\ldots$

ESCOMPTE. C'est en général la remise que fait le créan-

n faveur du paiement anticipé qu'on lui fait d'une e avant l'échéance du paiement. L'escompte se fait à our 100 par an, mois, etc. Si l'on désigne la somme ar a, le nombre (arbitraire, mais communément 100) quel on suppose en général que se fait l'escompte d, ce *escompte* sur ce nombre i, le temps que le paiement ticipé et qui doit être exprimé en unités ou fractions és de même espèce que le taux de l'escompte, c'est en s et fractions d'années, si l'escompte est fixé à tant 100 par an, et en mois ou fractions de mois si l'escomt fixé à tant pour 100 par mois. Nous appellerons ce t, ce qui reste après l'escompte fait ou ce qui revient i qui fait escompter $= r$, on a les relations suivantes

$$r = a\left(\frac{d}{d+it}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{100\,d}{100+it}$$

$$a = r\left(\frac{d+it}{d}\right) \quad \text{ou} \quad r\left(1+\frac{it}{100}\right)$$

$$i = d\left(\frac{a-r}{rt}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a-r}{rt}\times 100$$

$$t = d\left(\frac{a-r}{ir}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{a-r}{ir}\times 100$$

yez *Intérêt*.)

POSANTS (*Principes du calcul des*).

.°. $aaabbcc = a^3b^2c^2$

°. $a^{\pm m} = \dfrac{1}{a^{\mp m}}$

°. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

°. $a^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{mp}}{a^{np}}$

Multiplication.

$$a^m \times a^{-n} = a^{m-n}; \quad a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$$

$$a^m \times a^n = a^{m+n}; \quad a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n};$$

Division.

$$\frac{a^m}{a^m} = a^{m-n}\, n \text{ (si } n = m \text{ on a } a^0 = 1);$$

$$\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{n-m}; \quad \frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n};$$

$$\frac{a^{\frac{m}{n}}}{\frac{p}{aq}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}.$$

Élévation aux puissances.

$$\left(a^{\frac{p}{m}}\right)^n = a^{\frac{np}{m}} = \sqrt[m]{a^{np}}$$

$$\left(\frac{2}{3}\, a^{\frac{1}{3}}\right)^2 = \frac{4}{9}\, a^{\frac{2}{3}} = \frac{4}{9}\sqrt[3]{a^2}$$

Extraction des racines.

$$\sqrt[n]{a^{\frac{p}{m}}} = a^{\frac{p}{mn}} = \sqrt[mn]{a^p}$$

FACTEURS.

Table de facteurs usuels : π désigne la circonférence d'un cercle dont le diamètre est 1.

π = 3.1415926535897932384626433832795028841971693993751058209749445923078164062862089986280348253421170679821480865132723066470938446 +

[illegible]	[illegible]
$\frac{1}{2}\sqrt{2}$ . . .	0.[illegible]
$\sqrt{\pi}$ . . .	1.7724[illegible]
$\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ . . .	0.88[illegible]
$2\sqrt{\pi}$ . . .	3.5449077018110[illegible]

$\sqrt{\frac{\pi}{2}}$ . . .	1.25331413731550025120788264240 2
$\sqrt{\frac{2}{\pi}}$ . . .	0.797884560802865355879892119868
$\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . .	0.564189583547756286948079451560
$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . .	1.128379167095512573896158903120
$\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . .	0.282094791773878143474039725780
π^2	9.869604401089358618834490999876
$\frac{1}{\pi^2}$ . . .	0.101321183642337771443879463209
$\frac{1}{2\pi^2}$ . . .	0.050660591821168885721939731604
$\frac{1}{6\pi^2}$ . . .	0.016886863940389628573979910534
$2\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . .	1.128379167095512573896158903120
$\frac{1}{6}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . .	0.094031597257959381158013241926
$\frac{1}{8}\sqrt{\frac{1}{\pi}}$ . . .	0.070523697943469535868509931445
$\frac{1}{6\pi}$	0.053051647697298445256294587790
$\frac{360}{\pi}$	114.591559026154641753596309628200
$\frac{2}{3}\pi$ . . .	2.094395102393195492308428922186
$\frac{\pi}{24}$	0.130899693899574718269276807636
$\frac{6}{\pi}$	1.909859317102744029226605160470
$\sqrt[3]{\frac{6}{\pi}}$ . . .	1.2407009819, etc.

. . 59.217626406536151713006945999256

. . 3.89777707, etc.

. . 113.097335529232556584655161798602

. . 4.83597586204, etc.

. . 0.221556731363189503412270935418

. . . 0.159154943091895335768883763372

. . 0.805995977007. etc.

BOLE. (Voyez *Equation.*)

ÊT. Soit a la somme qu'on place à intérêt,
nbre de périodes (jour, mois, semestre, année) pen-
iel la somme a porté intérêt. Nous supposerons ici
résente un nombre *d'années*.
eur que 1 franc a acquise au bout d'une année, de
le taux de l'intérêt annuel étant, par exemple,

% 6 % 7 %. . . 10 % ou 0.1 les valeurs de
05 1.06 1.07. . . 1.10. . . . . il en résulte que
era évidemment l'intérêt annuel.
core i l'intérêt total de la somme a après t années.
osé, il y a plusieurs cas à considérer :
l'on retire, à la fin de chaque période, l'intérêt de
al, et alors on doit toucher à la fin d'une période

$$i = a\,(f - 1);$$

l'on convient de laisser dans les mains de l'emprun-
apital pendant t périodes avec la condition que les
échus à la fin de chacune d'elles ne s'ajouteront pas
ipal a pour porter intérêt; on dit alors qu'on place
s simples, et au bout de t périodes ou années, on
ier en intérêts seulement

$$i = a\,(f - 1)\,t$$

et si l'on retire des mains de l'emprunteur capital et int
on a à recevoir une somme totale V

$$V = a + a\,(f-1)\,t = a\,\{1 + (f-1)\,t\}$$

3° Ou bien, enfin, l'on convient que les intérêts q
prêteur ne touche pas à la fin de chaque période s'aj
ront au principal et porteront intérêts de même que ce
cipal; on dit alors que l'intérêt est *composé*, et que la
tion qui se présente d'abord est de chercher quelle val
le principal a a acquise au bout de t années, par l'accu
lation et la composition des intérêts. Or, on voit facile
que (*Aide-mémoire des ingénieurs*, page 1002), le prin
a a acquis, au bout de t années, une valeur

$$S = a f^t \ldots\ldots\ldots\ldots$$

valeur que l'on calculera toujours facilement par les lo
thmes, si on ne la trouvait pas dans la table suivante cal
dans l'hypothèse $a = 1000$ fr. $(f-1)$ étant 0.02 0.03
0.05 ou, enfin, 0.06 et t s'étendant de 1 à 50 années.

ANNÉES.	2 p. °/o.	3 p. °/o.	4 p. °/o.	5 p. °/o.	6 p. °/o.
1	1020	1030	1040	1050	1060
2	1040.40	1060.90	1081.60	1102.50	1123.60
3	1061.21	1092.73	1124.86	1157.63	1191.02
4	1082.43	1125.51	1169.86	1215.51	1262.48
5	1104.08	1159.27	1216.65	1276.28	1338.23
6	1126.16	1194.05	1265.32	1340.10	1418.52
7	1148.69	1229.87	1315.93	1407.10	1503.63
8	1171.66	1266.77	1368.57	1477.46	1593.85
9	1195.09	1304.77	1423.31	1551.33	1689.48
10	1218.99	1343.92	1480.24	1628.89	1790.85
11	1243.37	1384.23	1539.45	1710.34	1898.30
12	1268.24	1425.76	1601.03	1795.86	2012.20
13	1293.61	1468.53	1665.07	1885.65	2132.93
14	1319.48	1512.59	1731.68	1979.93	2260.90
15	1345.87	1557.97	1800.94	2078.93	2396.56
16	1372.79	1604.71	1872.98	2182.87	2540.35
17	1400.24	1652.85	1947.90	2292.02	2692.77
18	1428.25	1702.43	2025.82	2406.62	2854.34
19	1456.81	1753.51	2106.85	2526.95	3025.60
20	1485.95	1806.11	2191.12	2653.30	3207.14
21	1515.67	1860.29	2278.77	3785.96	3399.56
22	1545.98	1916.10	2369.92	2925.26	3603 54
23	1576.90	1973.59	2464.72	3071.52	3819.75
24	1608.44	2032.79	2563.30	3225.10	4048.93
25	1640.61	2093.78	2665.84	3386.35	4291.87
26	1673.42	2156.59	2772.47	3555.67	4549 38
27	1706.89	2221.29	2883.37	3733.46	4822.35
28	1741.02	2287.93	2998.70	3920.13	5111.69
29	1775.84	2356.57	3118.65	4116.14	5418.39
30	1811.36	2427.26	3243.40	4321.94	5743.49
31	1847.59	2500.08	3373.13	4538.04	6088.10
32	1884.54	2575.08	3508.06	4764.94	6453.39
33	1922.23	2652.34	3648.38	5003.19	6840.59
34	1960.68	2731.91	3794.32	5253.35	7251.03
35	1999.89	2803.86	3946.09	5516.02	7686.09
36	2039.89	2898.28	4103.93	5791.82	8147.25
37	2080.69	2985.23	4268.09	6081.41	8636.09
38	2122.30	3074.78	4438.81	6385.48	9154.25
39	2164.74	3167.03	4616.37	6704.75	9703.51
40	2208.04	3262.04	4801.02	7039.99	10285.72

ANNÉES.	2 p. °/o.	3 p. °/o.	4 p. °/o.	5 p. °/o.	6 p. •
41	2252.20	3359.90	4993.06	7391.99	10902.:
42	2297.24	3460.70	5192.78	7761.59	11557.:
43	2343.19	3564.52	5400.50	8149.67	12250.
44	2390.05	3671.45	5616.52	8557.15	12985.
45	2437.85	3781.60	5841.18	8985.01	13764.
46	2486.61	3895.04	6074.82	9434.26	14590.
47	2536.34	4011.90	6317.82	9905.97	15465.
48	2587.07	4132.25	6570.53	10401.27	16393.
49	2638.81	4256.22	6833.35	10921.33	17377.
50	2691.59	4383.91	7106.68	11467.40	18420.

Si l'on voulait, au moyen de cette table, trouver la v acquise, au bout de 39 ans, par une somme de 1254 fr., térêt (f — 1) étant 5 p. 100 ou 0.05, on trouverait

pour 1000 . . . . 6704f.75
multipliant par 1.254 il viendrait S = 8407.76

L'équation (s) résout trois autres questions, on en successivement

$$f = \sqrt[t]{\frac{S}{a}} \quad \text{ou} \quad \log. f = \frac{\log. S - \log. a}{t}$$

équation qui fera connaître la valeur f acquise par un au bout d'une année, ou bien encore le taux annuel d térêt (f—1) si de la valeur f qu'elle donne on retran

Et c'est ici le cas de remarquer que ces formules réso en même temps que lés questions d'argent, des prob du genre suivant :

Quel a dû être l'accroissement annuel de la popu d'une île sur laquelle on compte aujourd'hui un million bitants. On sait qu'il y a deux cents ans elle ne con que six habitants. On trouve :

$$\log. f = \frac{6 - 0.7781512}{200} = 0.0261092$$

d'où $f = 1.06196 \quad f - 1 = 0.062$

ɱ d'un accroissement moyen annuel d'un peu plus de
).
ı aussi

$$a = \frac{S}{f^t} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (A)$$

a connaître le principal qu'il faut placer pour que, au
e t années on retire une somme S, le taux de l'intérêt
onnu. (Voyez l'article ECONOMIE des constructions, de
ide-Mémoire.)
ı de $S = af^t$ on tire encore

$$t = \frac{\log. S - \log. a}{\log. f} \ldots\ldots\ldots \quad (T)$$

ıne le temps qu'une somme a doit rester placée pour
r une valeur S, le taux $(f-1)$ de l'intérêt étant

rouverait, par cette formule, qu'un capital quelconque
ou triple par l'accumulation des intérêts non perçus
ı nombre d'*années* indiqué par le tableau suivant :

rêt étant	le capital doublera en	triplera en
= 0.01	69.6603	110.409
0.02	35.0027	55.4478
0.03	23.4498	37.1671
0.04	17.6730	28.0111
0.05	14.2067	22.5171
0.06	11.8956	18.8541
0.07	10.2448	16.2376
0.08	9.0065	14.2749
0.09	8.0411	12.7482
0.10	7.2725	11.5267
0.11	6.6419	10.5271
0.12	6.1163	9.6940

URE des solides gauches et des corps qui n'ont point

polygone et de celui qui est circonscrit semblable, d'une part, $\frac{1}{2}an$, et de l'autre :

$$\frac{\frac{1}{2}an}{\sqrt{\left[\left(1+\frac{1}{2}a\right)\left(1-\frac{1}{2}a\right)\right]}}$$

Etant donné le côté a *d'un polygone régulier, trouver le rayon* R *du cercle qui lui est circonscrit.*

La table suivante et la formule $R = af$ résolvent ce problème.

NOMBRE de CÔTÉS.	ARC dont le côté du polygone est la corde.	VALEURS de f CORRESPOND.	VALEURS de c CORRESPOND.
3	120°	0.5773503	1.732051
4	90	0.7071068	1.414214
5	72	0.8506508	1.175570
6	60	1.0000000	1.000000
7	$51\frac{1}{7}$	1.1523824	0.867767
8	45	1.3065628	0.765367
9	40	1.4619022	0.684040
10	36	1.6180340	0.618034
11	$32\frac{8}{11}$	1.7747324	0.563465
12	30	1.9318517	0.517638

Veut-on connaître, par exemple, le rayon du cercle circonscrit à l'octogone dont le côté est 12, on a

$$R = 12 \times 1.3065628 = 15.66.....$$

Cette table, et la formule $cR = a$, peuvent encore servir à résoudre le problème inverse.

Etant donné le rayon R *d'un cercle, trouver le côté* a *d'un polygone régulier* (de moins de 12 côtés) *qui lui est inscrit.*

Soit par exemple 5 le rayon d'un cercle, on aurait, pour le côté du triangle équilatéral inscrit,

$$5 \times 1.732051 = 8.66.....$$

PROGRESSION *par différence*. Le premier terme est a, la

différence d, le nombre des termes n, le dernier u, et la somme s, on trouvera deux de ces quantités connaissant les trois autres au moyen des formules suivantes :

Trouver a.

Connaissant	
$n \,.\, d \,.\, u$	$a = u - d\,(n-1)$
$n \,.\, u \,.\, s$	$a = \dfrac{2s - un}{n}$
$n \,.\, d \,.\, s$	$a = \dfrac{2s - dn\,(n-1)}{2n}$
$u \,.\, d \,.\, s$	$a = \dfrac{d \pm \sqrt{[(2n+d)^2 - 8ds]}}{2}$

Trouver u.

Connaissant	
$a \,.\, d \,.\, n$	$u = a + d\,(n-1)$
$a \,.\, n \,.\, s$	$u = \dfrac{2s - an}{n}$
$d \,.\, n \,.\, s$	$u = \dfrac{2s + dn\,(n-1)}{2n}$
$a \,.\, d \,.\, s$	$u = \dfrac{-d \pm \sqrt{[(2a-d)^2 + 8ds]}}{2}$

Trouver n.

Connaissant	
$a \,.\, u \,.\, d$	$n = 1 + \dfrac{u-a}{d}$
$a \,.\, u \,.\, s$	$n = \dfrac{2s}{a+u}$
$a \,.\, d \,.\, s$	$n = \dfrac{d - 2a \pm \sqrt{[(2a-d)^2 + 8ds]}}{2d}$
$u \,.\, d \,.\, s$	$n = \dfrac{2u + d \pm \sqrt{[(2u+d)^2 - 8ds)}}{2d}$

Trouver d.

Connaissant

$a \, . \, u \, . \, n$	$d = \frac{u - a}{n - 1}$
$a \, . \, u \, . \, s$	$d = \frac{u^2 - a^2}{2s - a - u}$
$a \, . \, n \, . \, s$	$d = \frac{2s - 2an}{n\,(n-1)}$
$u \, . \, n \, . \, s$	$d = \frac{2un - 2s}{n\,(n-1)}$

Trouver s.

Connaissant

$a \, . \, u \, . \, n$	$s = \frac{(a+u)\,n}{2}$
$a \, . \, u \, . \, d$	$s = \frac{(a+u)\,(u-a+d)}{2d}$
$a \, . \, n \, . \, d$	$s = \frac{2an + dn\,(n-1)}{2}$
$u \, . \, n \, . \, d$	$s = \frac{2un - dn\,(n-1)}{2}$

Progression par quotient. Connaissant trois de ces quantités, le plus petit terme a, le plus grand u, le nc des termes n, la somme des termes s et le quotient q, tr les deux autres.

Trouver a.

Connaissant

$u \, . \, q \, . \, n$	$a = \frac{u}{q^{n-1}}$ ou $\log. a = \log. u - (n-1) \times$ l
$u \, . \, q \, . \, s$	$a = uq + s - sq$ ou $\log.(s-a) = \log. q + \log.$(
$q \, . \, n \, . \, s$	$a = \frac{s\,(q-1)}{q^n - 1}$ ou $\log. a = \log. s + \log.$($- \log.(q^n - 1)$
$u \, . \, n \, . \, s$	$a \times (s-a)^{n-1} - u \times (s-u)^{n-1} = o$

Trouver u.

Connaissant

$a \, . \, q \, . \, n$ | $u = aq^{n-1}$; $\log. u = \log. a + (n-1) \times$ l

$a.q.s$ | $u = \frac{sq - s + a}{q}$ ou $\log.(s-u) = \log.(s-a) - \log.q$

$q.n.s$ | $u = \frac{sq^{n-1}(q-1)}{q^n - 1}$ ou $\log.u = \log.s + (n-1) \times \log.q + \log.(q-1) - \log.(q^n - 1)$

$a.n.s$ | $u(s-u)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = o$

Trouver q.

Connaissant

$a.u.n$ | $q = \sqrt[n-1]{\frac{u}{a}}$ ou $\log.q = \frac{\log.u - \log.a}{n-1}$

$a.u.s$ | $q = \frac{s-a}{s-u}$ ou $\log.q = \log.(s-a) - \log.(s-u)$

$a.n.s$ | $aq^n - sq + s - a = o$

$u.n.s$ | $q^n - \frac{sq^{n-1}}{s-u} + \frac{u}{s-u} = o$

Trouver n.

Connaissant

$a.u.q$ | $n = 1 + \frac{\log.u - \log.a}{\log.q}$

$a.u.s$ | $n = 1 + \frac{\log.u - \log.a}{\log.(s-a) - \log.(s-u)}$

$a.q.s$ | $n = \frac{\log.(a + sq - s) - \log.a}{\log.q}$

$u.q.s$ | $n = 1 + \frac{\log.u - \log.(s - sq + uq)}{\log.q}$

Trouver s.

Connaissant

$a.u.q$ | $s = \frac{uq - a}{q-1}$ ou $\log.s = \log.(uq-a) - \log.(q-1)$

$a.u.n$ | $S = \frac{u\sqrt[n-1]{u} - a\sqrt[n-1]{q}}{\sqrt[n-1]{u} - \sqrt[n-1]{a}}$

on calculera séparément,

$$1^{o}.\ u\sqrt[n-1]{u} \qquad 2^{o}.\ a\sqrt[n-1]{a}$$

$$3^{o}.\ \sqrt[n-1]{u} \qquad 4^{o}.\ \sqrt[n-1]{a}$$

par les formules particulières,

$$1^{o}. \qquad \log.\ u\sqrt[n-1]{u} = \log.\ u + \frac{\log.}{n-}$$

$$2^{o}. \qquad \log.\ a\sqrt[n-1]{a} = \log.\ a + \frac{\log.}{n-}$$

$$3^{o}. \qquad \log.\ \sqrt[n-1]{u} = \frac{\log.\ u}{n-1}$$

$$4^{o}. \qquad \log.\ \sqrt[n-1]{a} = \frac{\log.\ a}{n-1}$$

$a.n.q$ $\quad S = \dfrac{a(q^n - 1)}{q-1}$ ou $\log. S = \log. a + \log. ($ $- \log. (q-1)$

$u.n.q$ $\quad S = \dfrac{u(q^n - 1)}{q^{n-1}(q-1)}$ ou $\log. S = \log. u + \log. ($ $- \log. q^{n-1} - \log. (q-1)$

Ces formules s'appliquent aux progressions décroi en regardant a comme le petit terme, u comme le plus q comme le quotient du plus grand des deux termes cutifs, divisé par le plus petit.

Applications des formules précédentes.

Problème. Il y a un panier et cent cailloux rangés e droite à des espaces égaux d'une toise. On propose ramasser et de les reporter dans le panier, un à un, er

'abord chercher le premier, puis le second, et ainsi de suite. ombien de toises fera celui qui entreprendra cet ouvrage ?

Il est clair que, pour le premier caillou, il faudra faire deux ›ises, une pour aller, une pour revenir ; il faudra en faire uatre pour le second, six pour le troisième, etc. Il est d'ail- ›urs facile d'apercevoir que ces nombres forment une pro- ression par différence, dont le nombre des termes $n=100$, › premier terme $a=2$, et le dernier terme $u=200$, la diffé- ›ncé $d=2$; la somme des termes S s'obtient par l'une des ›rmules de notre tableau. Choisissons la plus simple :

$$S=\frac{(a+u)\,n}{2}$$

› qui donne

$$S=\frac{(2+200)\times 100}{2}=\frac{20200}{2}=10100 \text{ toises.}$$

On a vu, au Luxembourg, une personne parier qu'elle irait › ce palais au château de Meudon, toucher la grille d'en- ée, et reviendrait au Luxembourg avant qu'une autre eût massé cent pierres espacées comme ci-dessus, et sous les êmes conditions. La dernière, qui n'avait aucune connais- nce mathématique, ne pouvant se persuader qu'une pareille ıtreprise exigeât tant de chemin, gagea une forte somme la perdit ; car la première fut de retour qu'elle était à peine la 85me pierre.

Problème. Un homme doit 1860 francs à un créancier qui ut bien lui permettre de s'acquitter en un an, sous les con- tions savoir, de lui payer le premier mois 100 francs, et suite, chaque mois, une somme de plus que le précédent, squ'au 12me, qui complétera le paiement. On demande de mbien le paiement de chaque mois devra être augmenté.

On voit ici qu'il s'agit de trouver la différence d d'une pro- ession dont on connait le nombre des termes : $n=12$ le

premier, $a = 100$, et la somme des termes $S =$ le montant de la dette $= 1860$, or

$$d = \frac{2s - 2an}{n(n-1)} = \frac{2 \times 1860 - 2 \times 12 \times 100}{12 \times 11} = \frac{3720 - 2400}{132}$$
$$= \frac{1320}{132} = 10\,f.$$

Il faudra donc augmenter chaque paiement de 10 francs; le premier étant 100, le second sera 110, le troisième 120, etc.

Problème des échecs. Ce problème si connu devait, à cause même de sa célébrité, trouver place ici; nous le donnerons donc tel à peu près que Ozanam le rapporte dans ses *Récréations*.

Un mathématicien de l'Inde, nommé Sessa, ayant inventé le jeu des échecs, le présenta au roi son maître, qui en fut si satisfait, qu'il voulut lui en donner une marque digne de sa magnificence. Il lui ordonna donc de demander la récompense qu'il désirait, lui promettant qu'elle lui serait accordée. Le mathématicien se borna à demander un grain de blé pour la première case de son échiquier, deux pour la seconde, quatre pour la troisième, et ainsi de suite, en doublant toujours jusqu'à la dernière ou soixante-quatrième case. Le prince s'indigna presque d'une demande qu'il jugeait répondre mal à sa libéralité, et ordonna à son visir de satisfaire Sessa : mais quel fut l'étonnement de ce ministre, lorsque, ayant fait calculer la quantité de blé nécessaire pour remplir l'ordre de ce prince, il vit que non-seulement il n'y avait pas assez de grains dans ses greniers, mais même dans tous ceux de ses sujets et dans toute l'Asie. Il en rendit compte au roi, qui fit appeler le mathématicien, et lui dit qu'il reconnaissait n'être pas assez riche pour remplir sa demande, dont la subtilité l'étonnait encore plus que l'invention du jeu qu'il lui avait présenté. On voit qu'il s'agit ici de trouver la valeur S des termes $n = 64$ d'une progression par quotient, dont la raison est $q = 2$, et le premier terme $a = 1$

r

$$S = \frac{a\,(q^n - 1)}{q - 1} = 2^{64} - 1$$

l suffirait donc, pour avoir le nombre de grains de blé, d'élever 2 à la 64me puissance, et de retrancher 1 du résultat : c'est ici que l'emploi des logarithmes devient très-avantageux, le logarithme de 2 est

0,30102,99956,63981,19521, qui, multiplié par 64, donne 19,26591,97224,94796,49344, qui répond à 18,446,744,073,709,551,616.

Telle est, si l'on en retranche une unité, la valeur de S, ou la somme des grains demandés. Des curieux ont trouvé qu'il fallait environ 261,000 grains de blé pour former le poids d'un myriagramme (environ 20 liv.) ; l'inventeur aurait donc

70677180359040 myriagrammes ;

et en évaluant ce poids à 2 francs, cela ferait

141,354,360,718,080 fr.

On a calculé aussi que les grains de blé pourraient couvrir, à un pied de hauteur, une étendue de pays environ trois fois et demie aussi grande que la surface de la France.

Problème. Combien de signes différents pourrait-on former avec les 24 lettres de l'alphabet ?

La formule donnera pour ce nombre

620,448,401,733,239,439,360,000.

Tous les hommes de la terre, réunis, ne parviendraient point, en *dix millions de siècles*, à écrire toutes ces permutations, en évaluant le travail par homme à 40 pages par jour, contenant chacune 40 permutations.

PRISME. V est le volume, B la base, H la hauteur.

$$V = B \times H$$

PUISSANCE. Table des neuf premières puissances des neuf premiers nombres.

PUISSANCE. — *Table des neuf premières puissances des neuf premiers nombres.*

1re.	2me.	3me.	4me.	5me.	6me.	7me.	8me.	9me.
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	4	8	16	32	64	128	256	512
3	9	27	81	243	729	2187	6561	19683
4	16	64	256	1024	4096	16384	65536	262114
5	25	125	625	3125	15625	78125	390625	1953125
6	36	216	1296	7776	46656	279936	1679616	10077696
7	49	343	2401	16807	117649	823543	5764801	40353607
8	64	512	4096	32768	262144	2097152	16777216	134217728
9	81	729	6561	59049	531441	4782969	43046721	387420489

RAMIDE. V est le volume, B la base, H la hauteur.

$$V = \frac{1}{3} B \times H.$$

ramide (Tronc de). A B étant les bases de ce tronc, hauteur, le volume V est

$$V = \frac{1}{3} H (A + B + \sqrt{AB})$$

JADRILATÈRE. Soit A l'aire d'un quadrilatère dont *d'* sont les diagonales, et α l'angle qu'elles forment elles.

$$A = \frac{1}{2} dd' \sin. \alpha$$

ADICAUX. En général on a : 1° pour l'addition et la traction

$$n\sqrt[n]{a} \pm p\sqrt[n]{a} \pm q\sqrt[n]{a} \ldots\ldots = (\pm m \pm p \pm q) \sqrt[n]{a}$$

Pour la multiplication et la division

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[m]{b} = \sqrt[m]{ab} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

Pour les réductions

$$\sqrt[m]{a^p} = \sqrt[mn]{a^{pn}}$$

conséquent

$$\sqrt[m]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n b^m} \quad \text{et} \quad \frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[mn]{\frac{a^n}{b^m}} = \sqrt[mn]{a^n b^{-m}}$$

Pour l'élévation aux diverses puissances, on a

$$\left(\sqrt[m]{a}\right)^n = \sqrt[m]{a^n}$$

our l'extraction des racines

$$\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$$

et lorsqu'on voudra faire entrer sous le signe la quantité le précède, on se rappellera le principe suivant

$$b\sqrt[m]{a}=\sqrt[m]{ab^m}$$

Cet autre principe pourra servir à simplifier quelque le calcul

$$\sqrt[m]{a^{m+n}}=a\sqrt[m]{a^n}$$

RAPPORT DE QUELQUES MESURES ANCIENNES ET NOUVELLES

1 mètre	= 0.513074 toises	= a;	log. a = 1.710
1 mètre	= 3 pieds, 078444	= b;	log. b = 0.488
1 toise	= 1.949037 mètres	= c;	log. c = 0.289
1 pied	= 0.3248394 mètres	= d;	log. d = 1.511
M mètres	= $(a \times M)$ toises	= $(b \times M)$ pieds.	
T toises	= $(c \times T)$ mètres.		
P pieds	= $(d \times P)$ mètres.		
1 are	= 26.3245 toises carrées		log. = 1.420
1 hectare	= 2.924943 arpents		log. 0.466
1 toise carr.	= 3.798744 mètres carrés		log. 0.579
1 pied carré	= 10.552 décimètres carrés.		
1 toise cube	= 7.40389 mètres cubes		log. 0.869
1 livre	= 4.8951 hectogr.	= h;	log. h = 0.689
1 kilog.	= 2.04286 livres	= l;	log. l = 0.310
L livres	= $(h \times L)$ hectogrammes.		
K kilog.	= $(l \times K)$ livres.		

Rapport de la circonférence au diamètre. (Voyez *Circonférence*.)

RENCONTRE de deux droites $y = ax + b$ $y' = a'x$ - Les coordonnées de ce point sont

$$x=\frac{b'-b}{a-a'}\quad y=\frac{ab'-a'b}{a-a'}$$

SECTEUR, SEGMENT de cercle. R est le rayon, α l'angle

ermine le secteur et le segment correspondant exprimé legrés et fraction de degrés

$$\text{l'aire du secteur} = \frac{1}{2} R \times \frac{\pi R^2 \alpha}{360}$$

$$\text{aire du segment} = \frac{1}{2} R \left(\frac{\pi \alpha}{180} - \sin . \alpha\right)$$

INUS. Valeur du sinus d'un arc dont la longueur est α (ne it confondre ici la longueur avec le nombre de degrés, ez *Arc*) dans le cercle dont le rayon est 1,

$$\alpha = \alpha - \frac{\alpha^3}{2 \times 3} + \frac{\alpha^5}{2.3.4.5} - \frac{\alpha^7}{2.3.4.5.6.7} + \ldots\ldots$$

OUS-NORMALE, SOUS-TANGENTE dans la parabole. étant l'abscisse du point par lequel passe la normale, p it le demi-paramètre.

ongueur de la sous-tangente $= 2x'$.

ongueur de la sous-normale $= p$.

ans l'ellipse, a étant toujours le demi-grand axe, b le ii-petit axe et x' l'abscisse du point par lequel passe la male, on a

gueur de la sous-tangente $\frac{a^2 - x'^2}{x'}$

gueur de la sous-normale $\frac{b^2 x'}{a^2}$

ans l'hyperbole

s-tangente $= \frac{x'^2 - a^2}{x'}$

s-normale $= \frac{b^2 x'}{a^2}$

PHÈRE. A est l'aire, V le volume, R le rayon, D le diare.

$$A = 4 \pi R^2 = R^2 \times 12.566370614$$

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3 = R^3 \times 4.188770204$$

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{A}{\pi}} = 0.282095 \times \sqrt{A}$$

$$= \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = 0.6203505 \sqrt[3]{V}$$

$$= \frac{1}{6}\pi D^3 = D^3 \times 0.523598775$$

TANGENTE (*Equation de la*). Dans les sections coniques, $x\,y$ sont les coordonnées de la courbe, $x'\,y'$ celles du point de tangence, p le demi-paramètre, on a pour la parabole

$$y\,y' = p\,(x + x')$$

Les appellations demeurant les mêmes, et a étant le demi-grand axe, b le demi-petit axe, on a pour la tangente à l'ellipse.

$$a^2 y\,y' + b^2 x\,x' = a^2 b^2$$

L'équation de la tangente à l'hyperbole est

$$a^2 y\,y' - b^2 x\,x' = -a^2 b^2$$

TRAPÈZE. A son aire, h la distance des bases parallèles B, b, on a

$$A = \frac{1}{2}\,h\,(B + b)$$

Ou si $a.\ b.\ c.\ d$ sont les quatre côtés du trapèze, b et d étant les deux bases ou côtés parallèles, et h leur distance ou la hauteur du trapèze, on a

$$A = \left(\frac{b + d}{2}\right) h$$

et si g est la différence des deux bases

$$h = \frac{1}{2g}\sqrt{(a+c+g)\,(a+g-c)\,(c+g-a)\,(a+c-g)}$$

TRIANGLE. A son aire, b sa base, h sa hauteur.

$$A = \frac{1}{2}\,b\,h$$

l'on connaît les trois côtés $\alpha + \beta + \gamma = 2p$, ou p étant emi-somme des trois côtés, on a

$$A = \sqrt{p(p-\alpha)(p-\beta)(p-\gamma)}$$

'oyez *Trigonométrie*.)

RIGONOMÉTRIE. Généralités.

$$\sin.^2 a + \cos.^2 a = 1$$
$$\sec.^2 a = \text{tang.}^2 a + 1$$

$$\text{tang. } a = \frac{\sin. a}{\cos. a}$$

$$\sec. a = \frac{1}{\cos. a}$$

$$\text{cotang. } a = \frac{\cos. a}{\sin. a}$$

$$\text{cosec. } a = \frac{1}{\sin. a}$$

$$\text{tang. } a \text{ cot. } a = 1$$
$$\text{cosec.}^2 a = 1 + \text{cotang.}^2 a$$

$$\cos. a = \frac{1}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 a)}}$$

$$\sin. a = \frac{\text{tang. } a}{\sqrt{(1 + \text{tang.}^2 a)}}$$

$$\text{sin-verse } a = 1 - \cos. a = 2 \sin.^2 \frac{1}{2} a$$

$$\sin. o = o; \quad \cos. o = R = \text{le rayon}$$
$$\text{tang. } o = o; \quad \sec. o = R \quad \text{cot. } o = \infty = \text{l'infini}$$

$$\sin. 1 \text{ quadrant} = R; \quad \cos. 1 \text{ quad.} = o$$
$$\text{tang. } 1 \text{ quad.} = \infty = \sec. 1 \text{ quad.}; \text{ cot. } 1 \text{ quad.} = o$$

Pour un arc de 1 quad. $+ a$ le sin. $=$ cos. a, le cos. $= -$ sin. a, la tang. $= -$ cot. a
2 quad. $+ a$ le sin. $= -$ sin. a, le cos. $= -$ cos. a, la tang. $=$ tang. a
3 quad. $+ a$ le sin. $= -$ cos. a, le cos. $=$ sin. a, la tang. $= -$ cot. a

$$\text{sin.}\,\frac{1}{3}q = \frac{1}{2}\text{R},\ \text{cos.}\,\frac{1}{3}q = \frac{1}{2}\text{R}\sqrt{3},\ \text{tang.}\,\frac{1}{3}q = \frac{\text{R}}{\sqrt{3}},\ \text{cot.}\,\frac{1}{3}q = \text{R}\sqrt{3}$$

$$\text{sin.}\,\frac{2}{3}q = \frac{1}{2}\text{R}\sqrt{3},\ \text{cos.}\,\frac{2}{3}q = \frac{1}{2}\text{R},\ \text{tang.}\,\frac{2}{3}q = \text{R}\sqrt{3},\ \text{cot.}\,\frac{2}{3}q = \frac{\text{R}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{tang.}\,45^\circ = \text{R} = \text{cot.}\,45^\circ,\ \text{cos.}\,45^\circ = \frac{1}{2}\text{R}\sqrt{2} = \text{sin.}\,45^\circ$$

$$\text{tang.}\,135^\circ = -\text{R} = \text{cot.}\,135^\circ,\ \text{sin.}\,135^\circ = \frac{1}{2}\text{R}\sqrt{2} = -\text{cos.}\,135^\circ$$

Valeurs des sinus et cosinus de la somme ou de la différence de deux arcs α, β.

$$\text{sin.}\,(\alpha \pm \beta) = \text{sin.}\,\alpha\ \text{cos.}\,\beta \pm \text{sin.}\,\beta\ \text{cos.}\,\alpha$$
$$\text{cos.}\,(\alpha \pm \beta) = \text{cos.}\,\alpha\ \text{cos.}\,\beta \mp \text{sin.}\,\alpha\ \text{sin.}\,\beta$$

Valeurs du sinus et du cosinus du double de l'arc α.

$$\text{sin.}\,(2\alpha) = 2\,\text{sin.}\,\alpha\ \text{cos.}\,\alpha$$
$$\text{cos.}\,(2\alpha) = \text{cos.}^2\alpha - \text{sin.}^2\alpha = 2\,\text{cos.}^2\alpha - 1 = 1 - 2\,\text{sin.}^2\alpha$$

Valeurs du sinus et du cosinus de la moitié d'un arc α.

$$\text{sin.}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1-\text{cos.}\,\alpha}{2}\right)};\ \text{cos.}\,\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\left(\frac{1+\text{cos.}\,\alpha}{2}\right)}$$

Valeur de la tangente de la somme ou de la différence de ux arcs α et β.

$$\text{tang.}\,(\alpha \pm \beta) = \frac{\text{tang.}\,\alpha \pm \text{tang.}\,\beta}{1 \mp \text{tang.}\,\alpha\ \text{tang.}\,\beta}$$

a pour la tangente du double de l'arc α

$$\text{tang.}\,(2\alpha) = \frac{2\ \text{tang.}\,\alpha}{1 - \text{tang.}^2\,\alpha}$$

pour celle de la moitié de l'arc α

$$\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,\alpha = \sqrt{\left(\frac{1 - \cos.\,\alpha}{1 + \cos.\,\alpha}\right)} = \frac{1 - \cos.\,\alpha}{\sin.\,\alpha}$$

fin

$$\frac{\sin.\,\alpha + \sin.\,\beta}{\sin.\,\alpha - \sin.\,\beta} = \frac{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha + \beta)}{\text{tang.}\,\frac{1}{2}\,(\alpha - \beta)}$$

Résolution des triangles rectilignes rectangles.

A est l'angle droit, B, C les angles aigus, a l'hypothénuse, c les côtés opposés aux angles aigus, le rayon étant 1, on a

$$a^2 = b^2 + c^2$$
$$b = a \cos.\ C$$
$$c = b\ \text{tang.}\,C$$

Résolution des triangles obliquangles.

ABC désignant toujours les trois angles, abc les côtés qui ur sont opposés.

Etant donnés aBC, on obtient

$$\text{A par}\quad A = 180 - (B + C)$$

$$b = \frac{a \sin.\,B}{\sin.\,A}$$

$$c = \frac{a \sin.\,C}{\sin.\,A}$$

Etant donnés c a A

$$\sin. C = \frac{c \sin. A}{a}; \quad B = 180 - (A + C)$$

enfin
$$b = \frac{a \sin. B}{\sin. A}$$

Comme sin. C répond à deux arcs, on pourrait être embarrassé pour savoir lequel de ces arcs convient au cas dont il s'agit, or

$$\text{si } A > 90° \text{ et } a > c, \text{ on a } C < 90°$$

Etant donnés b c A on cherchera d'abord la valeur de $\frac{1}{2}$ (C — B) que nous appelons n, au moyen de l'équation

$$\text{tang.}\, n = \frac{c - b}{c + b} \cot. \frac{1}{2} A$$

De cette valeur on tirera celle de $\frac{1}{2}$ (C + B) que nous nommerons m, au moyen de

$$\frac{1}{2} (C + B) = 90° - \frac{1}{2} A$$

et l'on aura

$$C = m + n \quad \text{et} \quad B = m - n$$

$$a = \frac{b \sin. A}{\sin. B} \quad \text{ou} \quad = \frac{c \sin. A}{\sin. C}$$

Etant donnés a . b . c, on cherchera

$$p = \frac{a + b + c}{2}$$

et l'on déduira A de

$$\sin. \frac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{(p - b)\,(p - c)}{bc}\right)}$$

$$\frac{1}{2} A \text{ est toujours} < 90°$$

$$\sin. C = \frac{c \sin. A}{a}; \quad B = 180 - (A + C)$$

Si le triangle est isoscèle, A étant l'angle du sommet et a la base, comme $b=c$, la valeur du sin. $\frac{1}{2}$ A devient

$$\sin.\frac{1}{2}A=\frac{(p-b)}{b}\quad\text{puis}\quad B=C=90^\circ-\frac{1}{2}A.$$

Trigonométrie sphérique.

Soient A. B. C les angles et a b c les côtés d'un triangle sphérique, on a toujours

$$a+b+c<360^\circ\ \text{et}\ A+B+C<6\times 90^\circ\ \text{et}>2\times 90^\circ$$

$$\frac{\sin.A}{\sin.a}=\frac{\sin.B}{\sin.b}=\frac{\sin.C}{\sin.c}$$

$$\cos.a=\cos.b\cos.c+\sin.b\sin.c\cos.A$$
$$\cos.b=\cos.a\cos.c+\sin.a\sin.c\cos.B$$
$$\cos.c=\cos.a\cos.b+\sin.a\sin.b\cos.C$$

on a aussi

$$-\cos.C=\cos.A\cos.B-\sin.A\sin.B\cos.c$$
$$\sin.a\cos.c=\sin.c\cos.a\cos.B+\sin.b\cos.C$$
$$\sin.a\cot.c=\cos.a\cos.B+\sin.B\cot.C$$

Résolution des triangles sphériques rectangles.

C étant l'angle droit, selon qu'on aura telles ou telles autres parties du triangle, on le résoudra complètement au moyen des équations suivantes :

$$\sin.b=\sin c\sin.B$$
$$\cos.c=\cos.a\cos.b$$
$$\cos.c=\cot.A\cot.B$$
$$\text{tang}.a=\text{tang}.c\cos.B$$
$$\text{tang}.b=\text{tang}.B\sin.a$$
$$\cos.A=\cos.a\sin.B$$

Résolution des triangles sphériques obliquangles.

I. Etant donnés $a \,.\, b \,.\, c$, trouver A . B . C.

Faisons $$p = \frac{a+b+c}{2}$$

on aura C par l'une des trois relations :

$$\sin.^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin.(p-a)\sin.(p-b)}{\sin a \sin. b}$$

$$\cos.^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin. p \sin.(p-c)}{\sin. a \sin. b}$$

$$\text{tang.}^2 \frac{1}{2} C = \frac{\sin.(p-a)\sin.(b-c)}{\sin. p \sin.(p-c)}$$

On cherchera alors une valeur auxiliaire k au moyen

$$\text{tang.} \frac{1}{2} k = \text{tang.} \frac{1}{2}(a+b) \text{tang.} \frac{1}{2}(a-b) \cot. \frac{1}{2}$$

Cette valeur donnera ces autres valeurs auxiliaires :

$$\frac{1}{2}(c+k), \ \frac{1}{2}(c-k)$$

que nous appelons la première t et la seconde s, et l'on o tiendra A et B par

$$\cos. A = \text{tang.}\, s \cot. b$$
$$\cos. B = \text{tang.}\, t \cot. a$$

II. Etant donnés A . B . C, trouver c.

Faisant $$k = \frac{A+B+C}{2}$$

on a $$\cos.^2 \frac{1}{2} c = \frac{\cos.(k-A)\cos(k-B)}{\sin. A \sin. B}$$

III. Etant donné ac et l'angle compris B, on aura le côté opposé à B par

$$\cos. b = \frac{\cos. c}{\cos. \varphi} \times \cos.(a-\varphi)$$

φ étant un angle auxiliaire qu'on déterminera d'abord p

$$\text{tang.}\, \varphi = \text{tang.}\, c \cos. B.$$

C s'obtiendra par

$$\cot. C = \frac{\cot. B}{\sin. \varphi} \times \sin. (a - \varphi)$$

Ou bien les équations suivantes donneront à la fois A et C

$$\text{tang.} \frac{1}{2} (A + C) = \cot. \frac{1}{2} B \times \frac{\cos. \frac{1}{2} (a - c)}{\cos. \frac{1}{2} (a + c)}$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2} (A - C) = \cot. \frac{1}{2} B \times \frac{\sin. \frac{1}{2} (a - c)}{\sin. \frac{1}{2} (a + c)}$$

IV. Etant donnés BC et le côté compris a, le côté c opposé à C sera donné par

$$\cot. c = \frac{\cot. a}{\cos. \varphi} \times \cos. (B - \varphi)$$

φ étant comme ci-dessus un angle auxiliaire qu'on obtient par

$$\cot. \varphi = \cos. a \text{ tang. } C.$$

Pour l'angle A opposé au côté donné a, on a d'abord l'équation auxiliaire

$$\cot. \varphi = \cos. a \times \text{tang. } B$$

puis
$$\cos. A = \frac{\cos. B}{\sin. \varphi} \times \sin. (C - \varphi)$$

V. Etant donnés b . c et un angle opposé B, on obtient a par l'équation auxiliaire

$$\text{tang. } \varphi = \text{tang. } c \cos. B$$

puis
$$\cos. (a - \varphi) = \frac{\cos. \varphi \cos. b}{\cos. c}$$

L'angle A formé par b et c, est donné par

$$\cot. \varphi = \cos. c \text{ tang. } B$$

et
$$\cos. (A - \varphi) = \cos. \varphi \text{ tang. } c \cot. b$$

Enfin, C se tire de

$$\frac{\sin. A}{\sin. a} = \frac{\sin. B}{\sin. b} = \frac{\sin. C}{\sin. c}$$

VI. Etant donnés B et C et c, on a pour a

$$\text{tang.}\, \varphi = \text{tang.}\, c \cos. B$$

$$\sin. (a - \varphi) = \sin. \varphi\, \text{tang.}\, B \cot. C$$

pour b on a

$$\sin. b = \frac{\sin. B \sin. c}{\sin. C}$$

A s'obtient par

$$\cot. \varphi = \cos. c\, \text{tang.}\, B$$

$$\sin. (A - \varphi) = \frac{\sin. \varphi \cos. C}{\cos. B}$$

Triangle isoscèle. B angle du sommet, b la base, a deux côtés égaux, A un des deux angles égaux, on tout le reste par

$$\sin. \frac{1}{2} b = \sin. \frac{1}{2} B \sin. a$$

$$\cos. a = \cot. \frac{1}{2} B \cot. A$$

$$\text{tang.} \frac{1}{2} b = \text{tang.}\, a \cos. A$$

$$\cos. \frac{1}{2} B = \cos. \frac{1}{2} b \sin. A$$

TABLES DIVERSES (Suivent ci-après).

Table des sinus et tangentes.

SINUS.	TANGENTES.	DEGRÉS.	SINUS.	TANGENTES.
0	0	90	10 000 000	Infinie.
174 524	174 551	89	9 998 477	572 899 620
348 995	349 208	88	9 993 908	286 362 530
523 360	524 078	87	9 986 295	190 811 370
697 565	699 268	86	9 975 640	140 006 660
871 557	874 887	85	9 961 947	114 300 520
1 045 285	1 051 042	84	9 945 218	95 143 645
1 218 693	1 227 846	83	9 925 462	81 443 464
1 391 731	1 405 408	82	9 902 680	71 153 697
1 564 345	1 583 844	81	9 876 883	63 137 515
1 736 482	1 763 270	80	9 848 077	56 712 818
1 908 090	1 943 803	79	9 816 271	51 445 540
2 079 117	2 125 565	78	9 781 476	47 046 301
2 249 511	2 308 682	77	9 743 701	43 314 759
2 419 219	2 493 280	76	9 702 957	40 107 809
2 588 190	2 679 492	75	9 659 258	37 320 508
2 756 374	2 867 454	74	9 612 617	34 874 144
2 923 717	3 057 307	73	9 563 048	32 708 526
3 090 170	3 249 197	72	9 510 565	30 776 835
3 255 682	3 443 276	71	9 455 185	29 042 109
3 420 202	3 639 702	70	9 396 926	27 474 774
3 583 679	3 838 640	69	9 335 804	26 050 891
3 746 066	4 040 262	68	9 271 839	24 750 869
3 907 311	4 244 749	67	9 205 049	23 558 524
4 067 366	4 452 287	66	9 135 454	22 460 368
4 226 183	4 663 077	65	9 063 078	21 445 069
4 383 712	4 877 326	64	8 987 940	20 503 038
4 539 905	5 095 254	63	8 910 065	19 626 105
4 694 716	5 317 094	62	8 829 476	18 807 265
4 848 096	5 543 090	61	8 746 197	18 040 478
5 000 000	5 773 503	60	8 660 254	17 320 508
5 150 381	6 008 606	59	8 571 673	16 642 795
5 299 193	6 248 694	58	8 480 481	16 003 345
5 446 390	6 494 076	57	8 386 706	15 398 650
5 591 929	6 745 085	56	8 290 376	14 825 610
5 735 764	7 002 075	55	8 191 521	14 281 480
5 877 853	7 265 426	54	8 090 170	13 763 819
6 018 150	7 535 540	53	7 986 355	13 270 448
6 156 615	7 812 856	52	7 880 107	12 799 416
6 293 204	8 097 840	51	7 771 460	12 348 972
6 427 878	8 390 996	50	7 660 444	11 917 536
6 560 590	8 692 868	49	7 547 096	11 503 684
6 691 306	9 004 041	48	7 431 448	11 106 125
6 819 984	9 325 151	47	7 313 537	10 723 687
6 946 584	9 656 888	46	7 193 398	10 355 303
7 071 068	10 000 000	45	7 071 068	10 000 000

Le rayon de cette table est 10000000; on a insc
même ligne les angles complémentaires pour facilit
cherche des cosinus et cotangentes.

Cette table peut servir à construire des angles d'
bre de degrés donné, soit au moyen des sinus et ta
soit au moyen des cordes (la corde de A = 2 si

DEGRÉS DE RÉAUMUR EN DEGRÉS CENTIGRA

Réaum.	Centig.	Réaum.	Centig.	Réaum.	C
1	1.25	28	35. »	55	[illegible]
2	2.50	29	36.25	56	[illegible]
3	3.75	30	37.50	57	[illegible]
4	5. »	31	38.75	58	[illegible]
5	6.25	32	40. »	59	[illegible]
6	7.50	33	41.25	60	[illegible]
7	8.75	34	42.50	61	[illegible]
8	10. »	35	43.75	62	[illegible]
9	11.25	36	45. »	63	[illegible]
10	12.50	37	46.25	64	8
11	13.75	38	47.50	65	8
12	15. »	39	48.75	66	8
13	16.25	40	50. »	67	8
14	17.50	41	51.25	68	8
15	18.75	42	53.75	69	8
16	20. »	43	53.75	70	8
17	21.25	44	55. »	71	8
18	22.50	45	56.25	72	9
19	23.75	46	57.50	73	9
20	25. »	47	58.75	74	9
21	26.25	48	60. »	75	9
22	27.50	49	61.25	76	9
23	28.75	50	62.50	77	9
24	30. »	51	63.75	78	9
25	31.25	52	65. »	79	9
26	32.50	53	66.25	80	10
27	33.75	54	67.50		

ÉS CENTIGRADES EN DEGRÉS DE RÉAUMUR.

Réaum.	Centig.	Réaum.	Centig.	Réaum.
0.8	35	28.»	68	54.4
1.6	36	28.8	69	55.2
2.4	37	29.6	70	56.»
3.2	38	30.4	71	56.8
4.»	39	31.2	72	57.6
4.8	40	32.»	73	58.4
5.6	41	32.8	74	59.2
6.4	42	33.6	75	60.»
7.2	43	34.4	76	60.8
8.»	44	35.2	77	61.6
8.8	45	36.»	78	62.4
9.6	46	36.8	79	63.2
10.4	47	37.6	80	64.»
11.2	48	38.4	81	64.8
12.»	49	39.2	82	65.6
12.8	50	40.»	83	66.4
13.6	51	40.8	84	67.2
14.4	52	41.6	85	68.»
15.2	53	42.4	86	68.8
16.»	54	43.2	87	69.6
16.8	55	44.»	88	70.4
17.6	56	44.8	89	71.2
18.4	57	45.6	90	72.»
19.2	58	46.4	91	72.8
20.»	59	47.2	92	73.6
20.8	60	48.»	93	74.4
21.6	61	48.8	94	75.2
22.4	62	49.6	95	76.»
23.2	63	50.4	96	76.8
24.»	64	51.2	97	77.6
24.8	65	52.»	98	78.4
25.6	66	52.8	99	79.2
26.4	67	53.6	100	80.»
27.2				

TABLE DES VITESSES DU VENT.

Vitesses par seconde en mètres.	Vitesses par heure en mètres	Vitesses par heure en lieues.	
0.5.	1,800. .	0.40. .	à peine sens
1.0.	3,600. .	0.81. .	sensible
2.0.	7,200. .	1.62. .	modéré
5.5.	19,800. .	4.45. .	assez fort
10.0.	36,000. .	8.16. .	fort
20.0.	72,000. .	16.20. .	très-fort
22.5.	81,000. .	17.35. .	tempête
27.0.	97,200. .	22.04. .	grande temp
36.0.	104,400. .	29.33. .	ouragan
45.0.	162,000. .	36.62. .	ouragan qu racine les bres et verse les fices.

*des températures moyennes de quelques-unes des prin-
pales villes en degrés du thermomètre centésimal.*

LLES.	Quantité moyenne d'eau qui tombe annuellement.	Température moyenne de l'année.	TEMPÉRATURE MOYENNE	
			de l'hiver.	de l'été.
	centim.			
....	»			
erdam. .	»			
....	»			
e	»	+ 9.6	0.0	+ 19.2
elles....	»	+ 11	+ 2.6	+ 19.0
eaux	»	+ 13.6	+ 5.6	+ 21.6
tiania ..	»	+ 6	— 1 8	+ 17.0
nhague .	»	+ 7.6	— 0.7	+ 17.0
....	»	+ 22.4	+ 14.7	+ 29.5
n.......	»	+ 9.5	+ 4	+ 15.3
erque ..	»	+ 10.3	+ 3.6	+ 17.8
bourg..	»	+ 8.8	+ 3.7	+ 14.6
ve	»	+ 9.6	+ 1.5	+ 18.3
ngue...	53	+ 8.3	— 0.9	+ 18.2
res.....	»	+ 10.2	+ 4.2	+ 17.3
pellier ..	»	+ 15.2	+ 6.7	+ 24.3
ille	»	+ 15	+ 7.5	+ 22.5
....	»	+ 13.2	+ 2.4	+ 22.8
ou	»	+ 4.5	— 11.8	+ 19.5
s.......	»	+ 12.6	+ 4.7	+ 20.3
....	»	+ 12.7	— 3.1	+ 28.1
....	53	+ 10.6	+ 3.7	+ 18.1
lelphie.	»	+ 11.9	+ 0.1	+ 23.3
bourg.	46	+ 3.8	— 8.3	+ 16.7
....	»	+ 15.8	+ 7.7	+ 24.0
holm...	»	+ 5.7	— 3.6	+ 16.6
n......	»	+ 16.7	+ 9.1	+ 23.9
vie	»	+ 9.2	— 1.8	+ 20.6
e......	»	+ 10.3	+ 0.4	+ 20.7
n......	»	+ 8.8	— 1.3	+ 17.8

FIN.

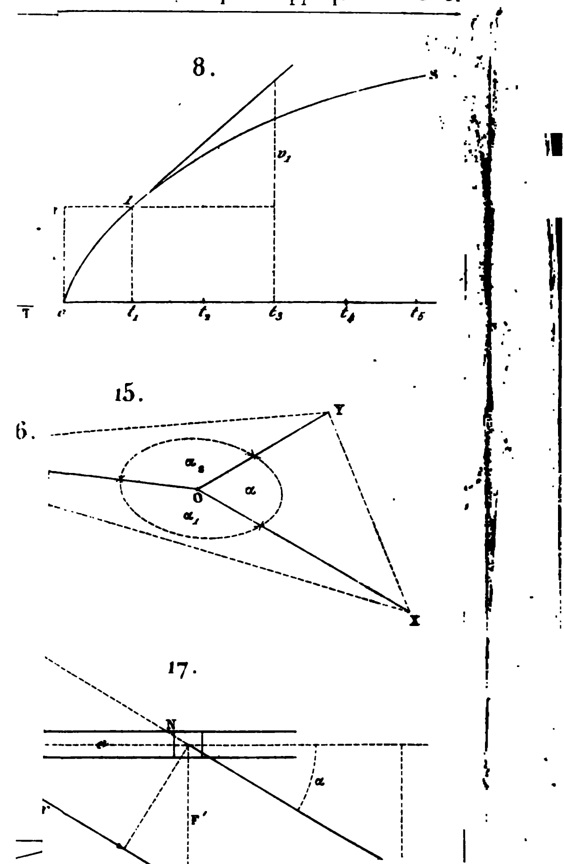
TABLE

DES MATIÈRES.

Pages.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

BAR-SUR-SEINE. — IMP. SAILLARD.



Imp. de Roret r. Hautef.

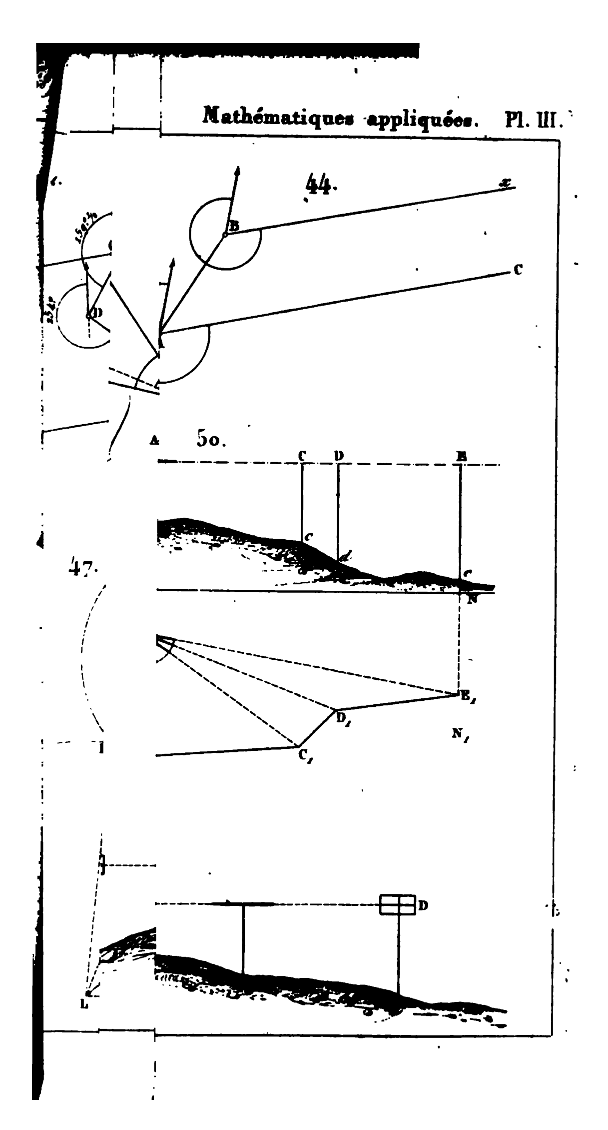
3.

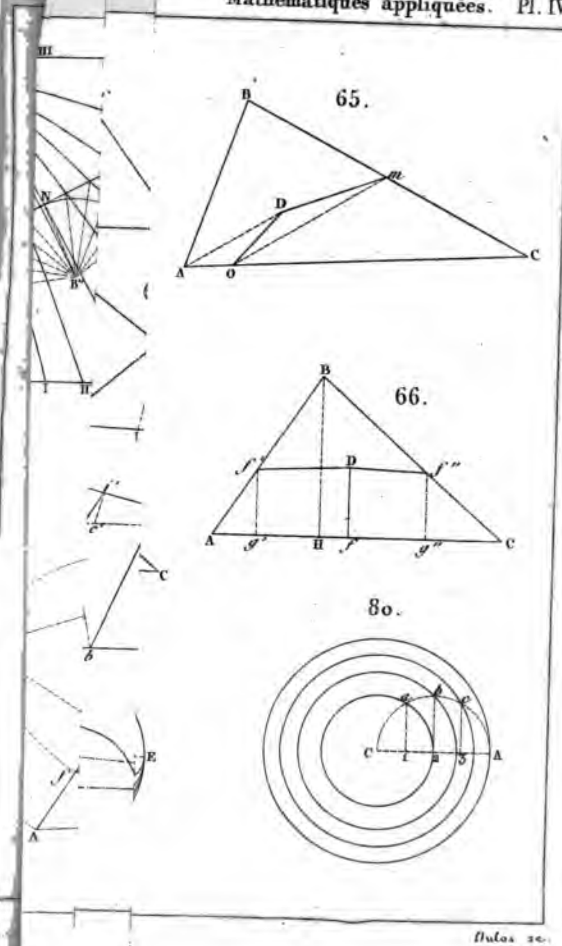
26.

27.

38.

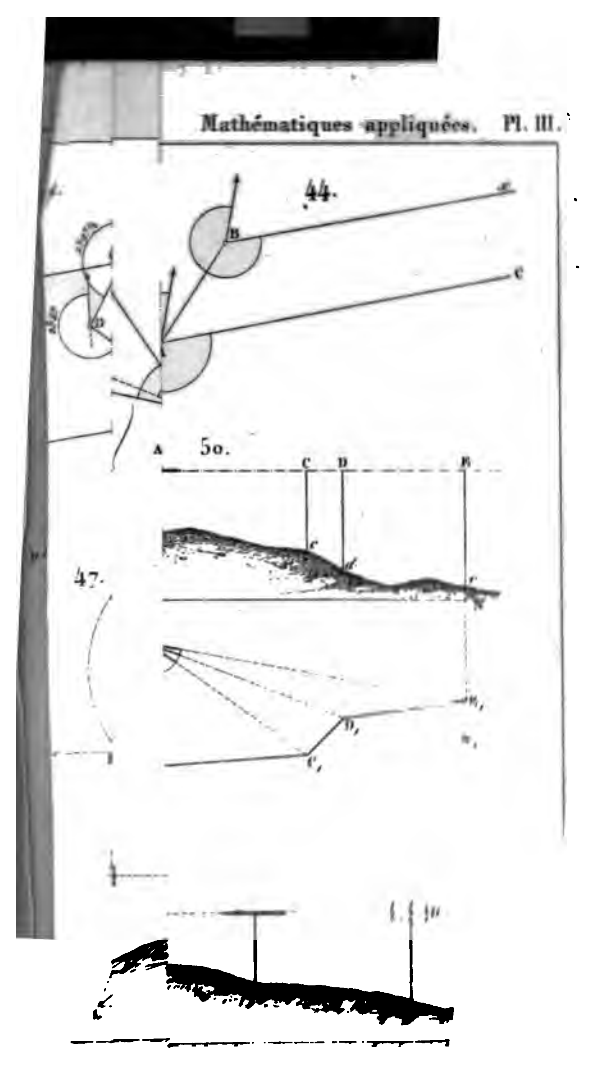
a
b
O.
I
C
A
c'
i'
E
A
B
B
E
H
D
D
S
Fer
A
F
B
a
A'
B'
b
a'
b'
T
Fer
Cuivre
Fer
Cuivre
Fer
Cuivre
Fer
Cuivre
Fer
c'
d'
C'
D'
c
d
C
D
L
G
B
A
C
b
a
c
O
e
d
E
D


44.
x
B
C
D
50.
A
C
D
E
c
d
e
N
E,
D,
N,
C,
47.
D
L



Dulos sc.




44.
B
C
50.
A
C
D
E
47.

[redacted]





